Mathematik

Die nichtmittelpunktstreuen Automorphismen der Cartanschen Bereiche.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster

vorgelegt von
Wilhelm Bohne
aus Rahden i. Westf.

1938

Buch- und Steindruckerei Max Kramer, Münster i.W., Aegidiistr. 23

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juni 1936.

Dekan: Herr Prof. Dr. J. Trier.

Referent: Herr Prof. Dr. H. Behnke.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung

Unter den Bereichen im Raume zweier komplexer Veränderlichen spielen die (m,p)-Bereiche eine besondere Rolle, die sich gründet auf die ausgezeichnete Transformationsgruppe und die Möglichkeit, dort reguläre Funktionen in Reihen nach Potenzen von $w^{\frac{1}{m}}, z^{\frac{1}{p}}$ zu entwickeln. Man definiert sie als diejenigen Bereiche, welche durch die Transformationen

$$(\vartheta): \quad w' = (w - w_0)\, e^{im\vartheta} + w_0 \,, \quad z' = (z - z_0)\, e^{ip\vartheta} + z_0$$

(m,p ganz und teilerfremd, ϑ reell) wieder in sich übergeführt werden. Sofort erhebt sich die Frage: Wie verhalten sich die (m,p)-Bereiche anderen Abbildungen gegenüber? Gibt es insbesondere auch nichtmittelpunktstreue Transformationen, die einen (m,p)-Bereich auf sich abbilden?

In einer Reihe von Arbeiten sind diese Fragen bereits für sehr wichtige Klassen solcher (m,p)-Bereiche beantwortet worden. So kennen wir schon sämtliche Abbildungen von Reinhardtschen Kreiskörpern auf sich [1]. Auch für die einfachen Kreiskörper (m= p=1) und für die Hartogsschen Körper (m.p=0) ist das Problem gelöst [2]. Wir setzen uns als Ziel, für die noch nicht un-

---

1) Siehe Reinhardt und Thullen.

2) Siehe Cartan II.

tersuchten beschränkten (m,p)-Bereiche die nicht-mittelpunktstreuen Abbildungen anzugeben, so weit es überhaupt solche gibt. Die mittelpunktstreuen sind bereits bekannt.[1] Die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen betreffen also die Bereiche mit $m.p>1$ und die Bereiche mit $m.p<0$.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst, welche verschiedenen Arten von (m,p)-Bereichen bekannt sind.

Ausgezeichnete Bereiche, d.h. solche, die Automorphismen mit Transformation des Mittelpunktes in einen beliebigen inneren Punkt zulassen, gibt es unter ihnen nur zwei, nämlich Hyperkugel und Dizylinder. Aber auch die Zahl derjenigen Körper, bei denen der Mittelpunkt in jeden Punkt einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit übergehen kann, ist sehr klein. Man kannte bisher bereits die Thullenschen Körper,

$$|w|^2 + \left|\frac{z}{z_0}\right|^{\alpha} < 1, \qquad (\alpha > 0),$$

die Cartanschen $\mathcal{K}_a$-Bereiche,

$$\left|\frac{w - z}{1 - w\bar{z}}\right| < a \text{ ,mit } |w| < 1,\ |z| < 1, (0 < a < 1),$$

und gewisse Hartogssche Körper[2], die jedoch uneigentliche Reinhardtsche Kreiskörper darstellen.

---

1) Cartan I, Seite 87f, théor. 30, corrollaire.

2) Vergl. Cartan II, "dicylindre generalisé", die Körper $1 < \frac{1-y\bar{y}}{|x|^{\alpha}} < M, (\alpha > 0)$, $1 < (1-y\bar{y})e^{\frac{x-\bar{x}}{i}} < M$.

Wir werden sehen, dass ausser ihnen nur noch eine Klasse solcher Ausnahmekörper existiert. Alle anderen kreissymmetrischen Bereiche gestatten überhaupt keine Transformationen des Mittelpunktes in einen anderen inneren Punkt.

Bei der Untersuchung der (m,p)-Bereiche sei im folgenden stets vorausgesetzt, dass der Nullpunkt des (w,z)-Raumes mit dem Mittelpunkt des untersuchten kreissymmetrischen Bereiches zusammenfällt. Falls von Abbildungen schlechthin gesprochen wird, so sind darunter eineindeutige und analytische Transformationen eines Bereiches zu verstehen. Ist der Bildbereich mit dem ursprünglichen identisch, so sprechen wir von einem Automorphismus.

Die folgenden Untersuchungen zerfallen in drei Teile, nämlich in diejenigen der Bereiche mit $m \cdot p > 1$, $m \cdot p = -1$ und mit $m \cdot p < -1$. Ohne Einschränkung der Voraussetzungen können wir stets $m > 0$ annehmen, so dass sich für p ergibt: Bei $m \cdot p > 1$: $p > 0$, bei $m \cdot p = -1$: $p = -1$ und bei $m \cdot p < -1$: $p = -p' < 0$.

§ 1. Hilfsmittel für die Untersuchung der Abbildungen von (m,p)-Bereichen

Auf H. Cartan[1] gehen folgende Sätze über die Abbildbarkeit eines (m,p)-Bereiches auf einen anderen zurück:

Satz I: Wird ein (m,p)-Bereich nullpunktstreu in

[1] Cartan I, vergl. auch Behnke-Thullen, Satz 67, 68, 62b.

einen andern mit gleichen m und p transformiert, so hat diese Abbildung folgende Form:

a.) Für $m \cdot p > 0$:
$$w' = \alpha w + \beta z^m$$
$$z' = \gamma w^p + \delta z.$$
($\beta = 0$ für $p \neq 1$, $\gamma = 0$ für $m \neq 1$).

b.) Für $m \cdot p < 0$:
$$w' = wf(u)$$
$$z' = zg(u) \quad .$$

(f(u) und g(u) sind als Funktionen von u regulär für alle $u = w^{p'} \cdot z^m$ mit w und z aus $\mathfrak{B}_{m,p}$.

Satz II : Kann ein (m,p)-Bereich $\mathfrak{B}_{m,p}$ ausser auf einen Bereich $\mathfrak{B}_{\tilde{m},\tilde{p}}$ mit $(\tilde{m},\tilde{p}) = (m,p)$ oder $(\tilde{m},\tilde{p}) = (p,m)$ auf einen anderen (m,p)-Bereich abgebildet werden, so lässt er sich auch auf einen Reinhardtschen Kreiskörper abbilden.

Satz III: Ein (m,p)-Bereich, der sich nicht in einen Reinhardtschen Kreiskörper transformieren lässt, kann nur eine endliche Anzahl weiter mittelpunktstreuer Transformationen ausser den definierenden ($\mathfrak{k}$) zulassen.

In den Transformationen ($\mathfrak{k}$) haben wir eine Liesche Gruppe nullpunktstreuer Transformationen vor uns. Es möge nun einen (m,p)-Bereich $\mathfrak{B}$ geben, der ausser den Transformationen ($\mathfrak{k}$) auch eine nichtmittelpunktstreue Abbildung ($\mathfrak{T}$) auf sich gestattet. Dann leistet die Gesamtheit der Transformationen $\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{k}(\mathfrak{T}))$[1] ebenfalls Abbildungen von $\mathfrak{B}$ auf

[1] Es soll zunächst die Transformation $\mathfrak{T}$, darauf eine der Transformationen ($\mathfrak{k}$), und zum Schluss die Umkehrung der Transformation $\mathfrak{T}$ auf den Bereich $\mathfrak{B}$ angewandt werden.

sich und hängt beliebig oft stetig differentiierbar von einem reellen Parameter ab. Der ursprüngliche Fixpunkt O bleibt gegenüber allen diesen Transformationen ,von der Identität abgesehen,nicht mehr fest. Er geht in eine Kurve durch den Nullpunkt über Es tritt demnach in einem (m,p)-Bereich,der einen nichtmittelpunktstreuen Automorphismus gestattet , sofort einen ganze Liesche Gruppe von nichtmittelpunktstreuen Automorphismen auf Wir können daher die Theorie der kontinuierlichen Gruppen verwenden, um die evtl. möglichen nichtmittelpunktstreuen Automorphismen von (m,p)-Bereichen festzustellen.

Die vorangegangenen Überlegungen machen wir uns zunutze bei der Aufstellung eines Gruppenoperators für die nichtmittelpunktstreuen Automorphismen Der Operator der mittelpunktstreuen Automorphismen in (m,p)-Bereichen lautet:

$$R = imw\frac{\partial}{\partial w} + ipz\frac{\partial}{\partial z} \quad (m,p \text{ teilerfremd})$$

Bei der Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf sich mittels der Transformation (T) geht dann R über in einen neuen Operator S ,der sich in folgender Form allgemein ansetzen lässt:

$$S = s(w,z)\frac{\partial}{\partial w} + t(w,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

s(w,z) und t(w,z) sind Funktionen,die sich in $\mathfrak{B}$ regulär verhalten und von denen im Punkte (0,0) höchstens eine verschwindet (Würden beide verschwinden,

so müssten alle durch S erzeugten Transformationen den Nullpunkt festlassen.)

H. Cartan gab auch einige Sätze über Reihenentwicklung von Funktionen in (m,p)-Bereichen an.[1] Eine in einem (m,p)-Bereiche analytische Funktion $f(w,z)$ lässt sich dort in folgender Weise in eine Reihe entwickeln:

1.) Für $m \cdot p > 0$ ist $f(w,z)$ identisch mit einer konvergenten Reihe von Polynomen

$$f(w,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w,z) \quad ,$$

wobei die Polynome

$$P_n(w,z) = \sum_{\mu_n \nu_n} c_{\mu_n \nu_n} (w^{\frac{1}{m}})^{m \cdot \mu_n} (z^{\frac{1}{p}})^{p \nu_n}$$

homogen sind vom Grade n nach $w^{\frac{1}{m}}$, $z^{\frac{1}{p}}$, d.h., es besteht die Gleichung $m \cdot \mu_n + p \nu_n = n$ mit $\mu_n, \nu_n \geq 0$.[2]

2.) Für $m \cdot p < 0$ bestehen die Glieder der konvergenten Reihe

$$f(w,z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(w,z)$$

aus Funktionen $\varphi_n(w,z)$ mit

$$\varphi_n(w,z) = w^{K_n} z^{\lambda_n} f_n(u), \quad (u = w^{p'} \cdot z^{m}, p = -p')$$

$K_n, \lambda_n \geq 0$ sind die kleinsten ganzen Zahlen, welche die Beziehung $m \cdot K_n + p \lambda_n = n$ erfüllen[2], und die $f_n(u)$ sind für alle inneren Punkte des (m,p)-Bereiches reguläre Funktionen von $u = w^{p'} z$

Setzen wir in diese Form die Werte m = 1 und p = -1

---

1) Vergl. Cartan I, S 54ff., Th 18,18bis und S 48, T

2) Da der Index von μ_n, ν_n bzw. K_n, λ_n stets aus demjenigen von P_n bzw. φ_n hervorgeht, wird fortan nur μ, ν bzw. K, λ geschrieben werden.

ein, so wird $K_\alpha = n$ für $n \geq 0$ und $\lambda_\alpha = -n$ für $n<0$
Wir erhalten damit

3.) Für $m = 1, p = -1$:

$$f(w,z) = \sum_0^\infty w^n f_n(w\,z) + \sum_1^\infty z^n f_{-n}(w\,z)$$

Die Koeffizienten $s(w,z)$ und $t(w,z)$ des Operators S sind als Funktionen von w und z analytisch in dem Bereiche $\mathfrak{L}$, den die durch S erzeugten Transformationen invariant lassen. Wir können sie also dort in Reihen entwickeln und S in folgender Form schreiben:

1.) $m\,p > 0$: $S = \left\{\sum_0^\infty s_n(w',z')\right\}\frac{\partial}{\partial w} + \left\{\sum_0^\infty t_n(w',z')\right\}\frac{\partial}{\partial z}$

mit gleichmässig konvergenten Reihen von Polynomen in w und z, die homogen sind nach $w' = w^{\frac{1}{m}} z' = z^{\frac{1}{p}}$

2.) $m\,p < 0$: $S = \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} w^K z^\lambda f_n(u)\right\}\frac{\partial}{\partial w} + \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} w^K z^\lambda \varphi_n(u)\right\}\frac{\partial}{\partial z}$,

mit $u = w^{p'} z^m$ und $m\,K - p'\lambda = n$.
Entsprechend ergibt sich der Ausdruck für $m\,p = -1$.

Wir übernehmen dann noch einige Sätze aus der Theorie der Lieschen Gruppen:[1)]

Definition: Die durch die n Operatoren $T_1, T_2, \ldots, T_n$ definierten infinitesimalen Transformationen heissen dann und nur dann linear unabhängig voneinander, wenn zwischen ihnen keine Beziehung der Art

$$c_1 T_1 + c_2 T_2 + \cdots\cdots + c_n T_n = 0$$

besteht mit reellen, nicht verschwindenden Konstanten $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$.

Satz A: Ist die Funktionalmatrix des Systems

[1)] S. Vivanti-Boulanger, Seite 24, 44, 45, 66.

$\Omega_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, $\Omega_2(x_1,\cdots,x_n)=0,\cdots,\Omega_n(\cdot)=0$, vom Range r ,so gestatten die Gleichungen $\Omega_j=0$ dann und nur dann eine einparametrige Gruppe von Transformationen,wenn sie auch deren Gruppenoperator T gestatten: $T(\Omega_j)=0$, $j=1,2,\cdots,r$

Satz B : Gestattet ein System von unabhängigen Gleichungen die Operatoren T_1 und T_2 ,so gestattet es auch den Operator (T_1,T_2) .

$(T_1,T_2)=T_1T_2-T_2T_1$ heisst der Klammerausdruck der Operatoren T_1 und T_2

Satz C : (Zweiter Liescher Hauptsatz) Notwendig und hinreichend dafür,dass die r linear unabhängigen Gruppenoperatoren $T_1,\cdots,T_r$ eine r-parametrige Transformationsgruppe erzeugen,ist,dass unter ihnen r.(r-1) Beziehungen der Form

$$(T_h,T_k)=\sum_{s=1}^{r}c_{hks}T_s \qquad (h,k=1,2,\cdots,r;\ h\neq k)$$

bestehen,wobei die c_{hks} reelle Konstanten sind.

Eine einfache Folgerung aus Satz C ergibt sich sofort:Besteht zwischen zwei Operatoren U und V die Beziehung $U=cV$ mit der reellen Konstanten $c\neq 0$, so erzeugen U und V die gleichen Transformationen.

§ 2. Die kreissymmetrischen Bereiche mit m.p>1.

Es möge $\mathfrak{B}$ ein (m,p)-Bereich sein,der nicht nur mittelpunktstreue Automorphismen gestattet,aber keinem Reinhardtschen Kreiskörper äquivalent ist. Nach Überlegungen,die wir im § 1 durchgeführt haben,gibt

es dann in der Gruppe $\mathfrak{G}$ aller Abbildungen von $\mathfrak{L}$ auf sich auch eine Liesche Untergruppe, die als Glieder die einparametrige Schar mittelpunktstreuer Transformationen ($\mathfrak{R}$) und wenigstens eine einparametrige Schar nichtmittelpunktstreuer Automorphismen enthält. Unter allen Untergruppen mit dieser Eigenschaft gibt es eine (evtl. mehrere) kleinste, die wir mit $\mathfrak{g}$ bezeichnen wollen. Wir führen nun die Untersuchung der (m,p)-Bereiche in der Weise durch, dass wir zunächst die Formen bestimmen, die $\mathfrak{g}$ in einem Bereiche annehmen kann, um dann von $\mathfrak{g}$ auf die Form von $\mathfrak{G}$ zu schliessen.

Im vorhergehenden Paragraphen hatten wir bereits in allgemeinster Form einen Operator S angegeben, der nichtmittelpunktstreue Automorphismen eines (m,p)-Bereiches erzeugt. Er lautet für $m \cdot p > 0$ [1]

$$S = \left\{\sum_0^\infty s_n(w',z')\right\}\frac{\partial}{\partial w} + \left\{\sum_0^\infty t_n(w',z')\right\}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (w' = w^{\frac{1}{m}}, z' = z^{\frac{1}{p}})$$

Die Konstanten s_0, t_0 dürfen nicht beide den Wert Null annehmen, da sonst die durch S erzeugten Transformationen den Nullpunkt festlassen würden. Wir können daher $s_0 \neq 0$ voraussetzen, ohne damit eine wesentliche Einschränkung zu machen. Bilden wir nun den Klammerausdruck zwischen dem Operator

$$R = i \cdot m \cdot w \frac{\partial}{\partial w} + i \cdot p \cdot z \frac{\partial}{\partial z},$$

und dem Operator S, so erhalten wir

---

[1] Vergl. S. 7, Zeile 11

$$S_1 = (R,S) = \left\{ imw \sum_0^\infty \frac{\partial s_n}{\partial w} + ipz \sum_0^\infty \frac{\partial s_n}{\partial z} - im \sum_0^\infty s_n \right\} \frac{\partial}{\partial w}$$

$$+ \left\{ imw \sum_0^\infty \frac{\partial t_n}{\partial w} + ipz \sum_0^\infty \frac{\partial t_n}{\partial z} - ip \sum_0^\infty t_n \right\} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= i \left\{ \sum_0^\infty (n-m) s_n(w',z') \right\} \frac{\partial}{\partial w} + i \left\{ \sum_0^\infty (n-p) t_n(w',z') \right\} \frac{\partial}{\partial z},$$

und ferner

$$S_2 = (R,S_1) = - \left\{ \sum_0^\infty (n-m)^2 s_n(w',z') \right\} \frac{\partial}{\partial w} - \left\{ \sum_0^\infty (n-p)^2 t_n(w',z') \right\} \frac{\partial}{\partial z}$$

(Es ist $s_n = \sum_{\mu,\nu} w^\mu z^\nu c_{\mu\nu}$ mit $m\mu + p\nu = n$,

$$mw \frac{\partial s_n}{\partial w} + pz \frac{\partial s_n}{\partial z}$$

$$= \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} (m\mu\, w^\mu z^\nu + p\nu w^\mu z^\nu) = n \cdot s_n \ ) .$$

Mit S_1 und S_2 ist auch $S^* = p^2 \cdot S + S_2$, also

$$S^* = - \left\{ \sum_0^\infty ((n-m)^2 - p^2) s_n \right\} \frac{\partial}{\partial w} - \left\{ \sum_0^\infty n(n-2p) t_n \right\} \frac{\partial}{\partial z} ,$$

ein Operator derjenigen Lieschen Gruppe ,der auch R und S angehören.

Wir setzen nun

$$s_n^* = (p^2 - (n-m)^2) s_n \quad \text{und} \quad t_n^* = n(2p-n) t_n$$

und bilden in entsprechender Weise die Klammerausdrücke $S_1^* = (R,S^*)$ und $S_2^* = (R,S_1^*)$. Dann erzeugt der Operator

$$m^2 S^* + S_2^* = - \left\{ \sum_0^\infty n(n-2m) s_n^* \right\} \frac{\partial}{\partial w} - \left\{ \sum_0^\infty ((n-p)^2 - m^2) t_n^* \right\} \frac{\partial}{\partial z}$$

Transformationen des Bereiches $\mathfrak{G}$,welche den Nullpunkt festlassen,denn es ist $t_0^* = 0$,und s_0^* erhält den Faktor 0 Nun gibt es nur eine einparametrige Schar von mittelpunktstreuen Automorphismen des

Bereiches $\mathfrak{L}$, da $\mathfrak{L}$ keinem Reinhardtschen Kreiskörper äquivalent ist Also muss $m^2S^* + S_2^*$ bis auf einen reellen, konstanten Faktor r mit R identisch sein: $m^2 S^* + S_2^* = r R$, und das heisst:

$$s_m^*(w',z') = \frac{r}{m} iw, \quad s_n^*(w',z') = 0 \text{ für } n \neq \begin{cases} 0 \\ m \\ 2m \end{cases}$$

$$t_p^*(w',z') = \frac{r}{m^2} ipz, \quad t_n^*(w',z') = 0 \text{ für } n \neq \begin{cases} p+m \\ p \\ p-m \end{cases} .$$

Nun erzeugt auch der Operator $T = S^* - \frac{r}{m^2} R$ Automorphismen des Bereiches $\mathfrak{L}$. T lässt sich jetzt in folgender Form schreiben:

$$T = (s_o^* + s_{2m}^*)\frac{\partial}{\partial w} + (t_{p+m}^* + t_{p-m}^*)\frac{\partial}{\partial z}$$

Die Polynome lassen sich bis auf konstante Faktoren a_i aus der Gleichung $m\mu + p\nu = n$ bestimmen und man erhält, ($a_4 = 0$ für $m \neq 1$):

$$T = (a_1 + a_2 w^2)\frac{\partial}{\partial w} + (a_3 w z + a_4 w^{p-1})\frac{\partial}{\partial z} .$$

Durch Klammerbildung ergeben sich weiter die Operatoren

$$T_1 = \frac{1}{m}(R,T) = i(-a_1 + a_2 w^2)\frac{\partial}{\partial w} + i(a_3 wz + a_4 w^{p-1})\frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$T_2 = \frac{1}{m}(R,T_1) = -(a_1 + a_2 w^2)\frac{\partial}{\partial w} - (a_3 wz + a_4 w^{p-1})\frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$\frac{1}{2}(T,T_1) = 2iw(a_1 a_2)\frac{\partial}{\partial w} + i\left\{a_1 a_3 z + w^p(a_3 a_4 - a_2 a_4(p-1))\right\}\frac{\partial}{\partial z}$$

T_2 geht durch Multiplikation mit -1 in T über, und $\frac{1}{2}(T,T_1)$ erzeugt nullpunktstreue Transformationen ,

muss also mit R wieder bis auf einen reellen, konstanten Faktor k übereinstimmen. Die Operatoren R, T, T_1 erzeugen demnach eine Liesche Gruppe von Transformationen, die unsere gesuchte Untergruppe $\mathfrak{g}$ ist. Ferner erhält man aus $k\,R = \frac{1}{2}(T,T_1)$ die Gleichungen

$$k\,m = 2\,a_1a_2\ ,\quad k\,p = a_1a_3\ ,\text{und}\quad a_3a_4 = a_2a_4(p-1)\ .$$

Für die Konstanten a_i ergeben sich damit folgende Beziehungen:

1.) $a_3 = 2\,\frac{p}{m}\,a_2 \neq 0$.

Wäre nämlich $a_2 = 0$, so würde T die Transformationen

$$w' = w + a_1 t\ ,\qquad z' = z$$

erzeugen. Gegenüber diesen Transformationen bleibt kein beschränkter Bereich fest, wenn der Parameter t läuft.

2.) Es kann von vornherein nur $a_4 \neq 0$ sein, wenn $m = 1$ ist. In diesem Falle aber würde unter Berücksichtigung von 1.) folgen:

$$a_3 = a_2\,(p-1) = 2\,p\,a_2\ ,\text{d.h. } p = -1\ .$$

Es kann also wegen $m \cdot p > 1$ nicht $a_4 \neq 0$ sein.

Zur Vereinfachung der Rechnungen nehmen wir jetzt jetzt eine Normierung unter den (m,p)-Bereichen vor. Nach Satz I wird ein (m,p)-Bereich durch die Transformation

$$(1)\qquad W = \frac{w}{a_1}\ ,\quad Z = z$$

wieder auf einen (m,p)-Bereich mit gleichen m und p abgebildet . Aus der Menge der untereinander äquivalenten Operatoren c.T möge T so gewählt sein,dass $a_1 = \frac{1}{a_2}$ wird.(Da a_1, a_2 ungleich Null sind,so ist das stets möglich.) Bilde ich dann den Bereich $\mathfrak{B}_{m,p}$ mittels der Transformation (1) ab auf den Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}_{m,p}$, so geht dabei der Operator T über entweder in

$$\tilde{T} = (1 + W^2)\frac{\partial}{\partial W} + 2\cdot\frac{p}{m} W Z \frac{\partial}{\partial Z}, \text{ oder in}$$

$$\tilde{T} = (1 - W^2)\frac{\partial}{\partial W} - 2\cdot\frac{p}{m} W Z \frac{\partial}{\partial Z}$$

Durch Integration werden die durch die verschiedenen Operatoren erzeugten Transformationen bestimmt.

1. Fall: Der Operator T geht über in die Form

$$\tilde{T} = (1 + W^2)\frac{\partial}{\partial W} + 2\cdot\frac{p}{m} W Z \frac{\partial}{\partial Z}.$$

Wir setzen dann

$$\frac{dW'}{dt} = 1 + W'^2 \quad , \quad \frac{dZ'}{dt} = 2\cdot\frac{p}{m}\cdot W' Z' \quad .$$

Lassen wir dem Parameterwert t = 0 die Identität entsprechen,so ergibt sich

$$W' = \frac{W + \dfrac{e^{2it} - 1}{i(e^{2it}+1)}}{1 - W\dfrac{e^{2it}-1}{i(e^{2it}+1)}} = \frac{W + a}{1 - aW} \quad , \text{ (a reell)}$$

$$Z' = Z\left[\frac{1 + W'^2}{1 + W^2}\right]^{\frac{p}{m}} = Z\left[\frac{1 + a^2}{(1 + aW)^2}\right]^{\frac{p}{m}} .$$

Diese Transformationen lassen jedoch keinen beschränkten Bereich invariant, denn $W'(0)$ und damit $Z'(0)$ kann beliebig grosse Werte annehmen, wenn der Parameter t (bzw. a) läuft.

2.Fall : T geht über in den Operator

$$\tilde{T} = (1 - W^2)\frac{\partial}{\partial W} - 2.\frac{p}{m} \cdot W Z \frac{\partial}{\partial Z}.$$

Zur Berechnung der durch $\tilde{T}$ (und durch $\tilde{T}_1$) erzeugten Automorphismen verfahren wir genau so wie im ersten Fall und erhalten so die Gruppe $\tilde{g}$:

$$W' = \frac{W + \alpha}{1 + \bar{\alpha} W} e^{im\vartheta}, \quad Z' = Z \left[\frac{1 - \alpha\bar{\alpha}}{(1 + \bar{\alpha} W)^2}\right]^{\frac{p}{m}} e^{ip\vartheta}, \quad |\alpha| < 1.$$

Wir suchen nun die Bereiche, die durch diese Transformationen auf sich abgebildet werden.

Es sei (W_1, Z_1) Randpunkt eines solchen Bereiches Soll keine Singularität der Abbildung im Innern auftreten, so muss

$$1 + \bar{\alpha} W \neq 0, \quad \text{d.h.} \quad |W_1| < 1$$

bleiben . Dann kann ich stets eine solche Transformation der Gruppe $\tilde{g}$ finden, dass der Punkt (W_1, Z_1) auf $(0, Z_0)$ abgebildet wird, wenn nicht gerade $W_1 = 1$ ist. Der Punkt $(0, Z_0)$ hat als Bildpunkte alle Punkte mit

$$W = \alpha e^{im\vartheta}, \quad Z = Z_0 (1 - W\overline{W})^{\frac{p}{m}} e^{ip\vartheta} .$$

Also wird der Rand eines Bereiches, der die Gruppe $\tilde{g}$ zulässt, gebildet durch die Mannigfaltigkeit

$$|W|^2 + \left|\frac{Z}{Z_0}\right|^{\frac{m}{p}} = 1$$

Ein solcher Bereich wird jedoch auch durch alle Transformationen der Form

$$W'' = W e^{i\vartheta}, \quad Z'' = Z e^{i\varphi} \quad (\vartheta, \varphi \text{ reell})$$

wieder auf sich abgebildet, ist also ein Reinhardtscher Kreiskörper. Wir haben damit den Satz gewonnen

Satz 1: Gestattet ein beschränkter (m,p)-Bereich mit $m \cdot p > 1$ nichtmittelpunktstreue Automorphismen, so ist er einem Reinhardtschen Kreiskörper äquivalent.

§ 3 Kreissymmetrische Bereiche mit $m \cdot p = -1$.

Bei der Untersuchung der (1,-1)-Bereiche gehen wir nach dem gleichen Prinzip vor wie bei den Bereichen mit $m \cdot p > 1$. Es sei also wieder $\mathfrak{g}$ eine kleinste Liesche Gruppe mit der Eigenschaft, dass sie mittelpunktstreue und zugleich nichtmittelpunktspunktstreue Transformationen eines (1,-1)-Bereiches enthält. Wir suchen dann zunächst wieder die Form derjenigen Operatoren zu bestimmen, welche die Gruppe $\mathfrak{g}$ erzeugen.

Da es nur eine einparametrige Gruppe von mittelpunktstreuen Automorphismen des Bereiches $\mathfrak{B}$ gibt, falls $\mathfrak{B}$ keinem Reinhardtschen Kreiskörper äquivalent ist, so haben wir in

$$R = i \cdot w \frac{\partial}{\partial w} - i \cdot z \frac{\partial}{\partial z}$$

den Operator der mittelpunktstreuen Transformationen vor uns. Nichtmittelpunktstreue Automorphis-

men eines (1,-1)-Bereiches werden dann erzeugt durch einen Operator, der sich zunächst in der allgemeinen Form

$$S = \left\{\sum_0^\infty w^n f_n(u) + \sum_1^\infty z^n f_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial w} + \left\{\sum_0^\infty w^n g_n(u) + \sum_1^\infty z^n g_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial z}$$

mit $u = w\,z$ schreiben lässt [1]. Ferner muss wenigstens eine der beiden Funktionen $f_o(u)$ und $g_o(u)$ für $u = 0$ von Null verschieden sein, da sonst der Nullpunkt gegenüber den erzeugten Transformationen fest bliebe. Auch hier bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn wir für die Folge $f_o(0) \neq 0$ voraussetzen.

Wir bilden nun Klammerausdrücke zwischen R und S und berücksichtigen dabei folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial f_n(u)}{\partial w} = \frac{df_n(u)}{du}\frac{\partial(w\,z)}{\partial w} = z\,\frac{df_n(u)}{du}; \quad \frac{\partial f_n(u)}{\partial z} = w\,\frac{df_n(u)}{du}$$

$$i\,w\,w^n\,\frac{\partial f_n(u)}{\partial w} - i\,z\,w^n\,\frac{\partial f_n(u)}{\partial z} = 0\,.$$

So erhalten wir als Operatoren, die der gleichen Gruppe wie R und S angehören:

$$S_1 = (R,S) = i\left\{\sum_0^\infty (n-1)w^n f_n(u) - \sum_1^\infty (n+1)z^n f_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial w} + i\left\{\sum_0^\infty (n+1)w^n g_n(u) - \sum_1^\infty (n-1)z^n g_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$S_2 = (R,S_1) = -\left\{\sum_0^\infty (n-1)^2 w^n f_n(u) + \sum_1^\infty (n+1)^2 z^n f_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial w} - \left\{\sum_0^\infty (n+1)^2 w^n g_n(u) + \sum_1^\infty (n-1)^2 z^n g_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial z}$$

1) Vergl. S. 7, Z. 14f.

Nun erzeugt auch der Operator $S^* = S + S_2$ nullpunktstreue Transformationen:

$$S^* = -\left\{\sum_0^\infty n(n-2)w^n f_n(u) + \sum_1^\infty n(n+2)z^n f_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial w}$$
$$-\left\{\sum_0^\infty n(n+2)w^n g_n(u) + \sum_1^\infty n(n-2)z^n g_{-n}(u)\right\}\frac{\partial}{\partial z} .$$

Da $\mathfrak{H}$ keinem Reinhardtschen Kreiskörper üquivalent sein sollte, gibt es nur eine einparametrige Gruppe nullpunktstreuer Automorphismen des Bereiches $\mathfrak{H}$, und deshalb ist

$$S^* = r\,R \quad (r \text{ eine reelle Konstante}) .$$

Ist aber diese Beziehung erfüllt, so verschwinden alle $f_n(u)$ für $n \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$, und alle $g_n(u)$ für $n \neq \begin{cases} 0 \\ -1 \\ -2 \end{cases}$, und es ist

$$(2) \qquad f_1(u) \equiv r\cdot i \,, \quad g_{-1}(u) \equiv -r\cdot i \,.$$

Nun erzeugen auch die Operatoren $T = S - r\,R$ und $T_1 = (R,T)$ Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$, und wir können auf Grund der Gleichungen (2) T und T_1 in der Form

$$T = (f_0(u)+f_2(u)w^2)\frac{\partial}{\partial w} + (g_0(u)+g_{-2}(u)z^2)\frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$T_1 = i(-f_0(u)+f_2(u)w^2)\frac{\partial}{\partial w} + i(g_0(u)-g_{-2}(u)z^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

schreiben. Es sei hier auf folgendes hingewiesen: Der Operator T verhält sich regulär im ganzen Innern von $\mathfrak{H}$. Infolgedessen verhält er sich ausserhalb und auf dem Rande von $\mathfrak{H}$ sicher regulär auf allen Flächen $u = c$, die den Bereich $\mathfrak{H}$ schneiden.

Bilden wir weiter den Klammerausdruck von R und T_1, so erhalten wir $(R,T_1) = -T$ Andererseits erzeugt

$$\frac{1}{2}(T,T_1) = iw\left\{2f_of_2 - f_o'(g_o+uf_2) + uf_2'(f_o+ug_{-2})\right\}\frac{\partial}{\partial w}$$

$$-iz\left\{2g_og_{-2} - g_o'(f_o+ug_{-2}) + ug_{-2}'(g_o+uf_2)\right\}\frac{\partial}{\partial t}$$

nullpunktstreue Transformationen $\frac{1}{2}(T,T_1)$ muss also gleichfalls bis auf einen reellen konstanten Faktor k mit R identisch sein Durch Klammerung erhalten wir also keine neuen Operatoren mehr Infolgedessen gilt:

1.) Die Operatoren R,T,T_1 erzeugen eine Liesche Gruppe von Transformationen, die unsere gesuchte Untergruppe $\mathfrak{H}$ ist

2.) Die Funktionen $f_o(u)$, $f_2(u)$, $g_o(u)$, $g_{-2}(u)$ unterliegen den Bedingungen

$$(3)\quad \begin{cases} k \equiv 2f_of_2 - f_o'(g_o + uf_2) + uf_2'(f_o + ug_{-2}) \\ k \equiv 2g_og_{-2} - g_o'(f_o + ug_{-2}) + ug_{-2}'(g_o + uf_2) \end{cases}.$$

Aus den Gleichungen (3) folgt

$$(3a)\quad (f_o+ug)\left(f_2 + \frac{d(g_o+uf_2)}{du}\right) \equiv (g_o+uf_2)\left(g_{-2} + \frac{d(f_o+ug_{-2})}{du}\right).$$

Integriert man diesen Ausdruck nach Division durch

$$(f_o + u\,g_{-2})(g_o + uf_2),$$

so erhält man

$$\log(f_o+ug_{-2}) + \int\frac{g_{-2}}{f_o+ug_{-2}}\,du \equiv \log(g_o+uf_2) + \int\frac{f_2}{g_o+uf_2}\,du$$

oder, nach weiterer Umformung,

$$(3b)\quad (f_0+ug_{-2})e^{\int \frac{g_{-2}}{f_0+ug_{-2}}du} \equiv (g_0+uf_2)e^{\int \frac{f_2}{g_0+uf_2}du} .$$

In der erhaltenen Form lassen sich aus den Operatoren T und T_1 noch keineswegs die von ihnen erzeugten Transformationen angeben, denn auch nach den Gleichungen (3), bzw. (3a) und (3b), sind die Funktionen $f_0(u), f_2(u), g_0(u), g_{-2}(u)$ nicht vollständig bestimmt. Wir suchen deshalb auch unter den (1,-1)-Bereichen mit nichtmittelpunktstreuen Automorphismen eine Normierung so vorzunehmen, dass dabei der Operator T (und damit auch T_1) in eine solche Form $\tilde{T}$ (bzw. $\tilde{T}_1$) übergeht, aus der sich die erzeugten Transformationen besser bestimmen lassen.

Nun werden (1,-1)-Bereiche aufeinander abgebildet durch ein Funktionspaar von der Form

$$(4)\quad W = w.\varphi(u)\ ,\quad Z = z\,\psi(u)\ ,$$

wo die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in dem abzubildenden (1,-1)-Bereiche regulär sind. Wir suchen ein solches Funktionspaar zu bestimmen, dass durch (4) unser Bereich auf einen geeignet normierten (1,-1)-Bereich abgebildet wird.

Ist eine Abbildung der Form (4) gegeben, so erscheint der Operator T in den neuen Veränderlichen (W,Z) in der Form

$$\tilde{T} = (F_0(U) + F_2(U)\cdot W^2)\frac{\partial}{\partial W} + (G_0(U) + G_{-2}(U)\cdot Z^2)\frac{\partial}{\partial Z}$$

Dabei ergeben sich die Koeffizienten dieses Operators in folgender Weise aus denjenigen des Operators T :

$$F_o(U) = \varphi f_o + u\varphi'(f_o + ug_{-2}) = h_1(u) ,$$

$$F_2(U) = \frac{\varphi f_2 + \varphi'(g_o + uf_2)}{(\varphi)^2} = h_2(u) ,$$

$$G_o(U) = \psi g_o + u\psi'(g_o + uf_2) = h_3(u) ,$$

$$G_{-2}(U) = \frac{\psi g_{-2} + \psi'(f_o + ug_{-2})}{(\psi)^2} = h_4(u) .$$

Ausser den abkürzenden Bezeichnungen $h_j(u)$ führen wir die beiden folgenden ein:

$$Q_1(u) = f_o + ug_{-2} , \quad Q_2(u) = g_o + uf_2 .$$

Durch triviale Umrechnung der Gleichungen (3) ergibt sich :

$$(3c)\begin{cases} 2h_1h_2 - \frac{h_1'}{\varphi} Q_2 + uh_2'\varphi Q_1 \equiv 2f_of_2 - f_o'Q_2 + uf_2'Q_1 \equiv k , \\ 2h_3h_4 - \frac{h_3'}{\psi} Q_1 + uh_4'\psi Q_2 \equiv 2g_og_{-2} - g_o'Q_1 + ug_{-2}'Q_2 \equiv k . \end{cases}$$

Für die Regularität der später zu definierenden Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ sind die Nullstellen der beiden Ausdrück $Q_1(u)$ und $Q_2(u)$ wichtig . Wir beweisen deshalb zunächst

Hilfssatz 1: In einem beschränkten (1,-1)-Bereich $\mathfrak{B}$ der die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, haben $Q_1(u)$ und $Q_2(u)$ keine Nullstellen gemeinsam.

Beweis: Es möge $Q_1(u_o) = Q_2(u_o) = 0$ sein. (Da $f_o(0) \neq 0$ vorausgesetzt war, so ist sicher $u_o \neq 0$). Wir wenden dann die Operatoren der Gruppe $\mathcal{G}$ auf

$$\Omega(w,z) = w.z - u_o = 0$$

an. Es ist

$$(5)\begin{cases} R(\Omega) = i.w.z - i.z.w = 0 , \\ T(\Omega) = (f_o+w^2f_2)z + (g_o+z^2g_{-2})w = zQ_1+wQ_2\big|_{u=u_o} = 0 , \\ T_1(\Omega) = i(-f_o+w^2f_2)z + i(g_o-z^2g_{-2})w = iwQ_2 - izQ_1\big|_{u=u_o} = 0 \end{cases}$$

Da sowohl $\frac{\partial \Omega}{\partial w} = z$ als auch $\frac{\partial \Omega}{\partial z} = w$ auf der Fläche $w.z = u_o$ nicht verschwinden, so stellen die Gleichungen (5) nach Satz A eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass die Fläche $w.z = u_o$ bei sämtlichen Transformationen der Gruppe $\mathcal{G}$ auf sich abgebildet wird.

$\mathcal{B}$ ist nach Voraussetzung beschränkt. Gäbe es also innere Punkte des Bereiches $\mathcal{B}$ auf der Fläche $w.z = u_o$ so würde die Gesamtheit dieser Punkte einen (evtl. mehrere) zweidimensionalen Bereich $\mathcal{b}$ bilden, der durch sämtliche Transformationen einer dreiparametrigen Gruppe wieder in sich transformiert würde. $\mathcal{b}$ müsste also einfach zusammenhängend sein.

Ist (w_o, z_o) ein innerer Punkt von $\mathcal{b}$, so kann durch die Transformationen $(\mathcal{R})$ der Punkt (w_o, z_o) in jeden Punkt des Kreises $(w_o e^{i\vartheta}, z_o e^{-i\vartheta})$ mit beliebigem ϑ übergeführt werden. Dieser Kreis liegt in $\mathcal{b}$ und weiter auf der Ebene $w\,\bar{z}_o = w_o\,\bar{z}$, also einer nichta-

nalytischen Ebene durch den Nullpunkt Er lässt sich in $\mathfrak{b}$ nicht zusammenziehen, ohne dass $w = 0$ oder $z = 0$ überschritten wird Ein Punkt $(0,z)$ oder $(w,0)$ liegt aber nicht auf $w\,z = u_0$ Also ist der Kreis $(w_0 e^{i\vartheta}, z_0 e^{-i\vartheta})$ nicht auf der Fläche $w\,z = u_0$ in $\mathfrak{b}$ zusammenziehbar und damit $\mathfrak{b}$ nicht einfach zusammenhängend Damit sind wir auf einen Widerspruch gestossen. $\mathfrak{b}$ kann also nicht existieren

Es war $f_0(0) \neq 0$ vorausgesetzt worden Für die weiteren Untersuchungen haben wir nun zu unterscheiden ,ob daneben

$$g_0(0) = 0 \quad \text{oder} \quad g_0(0) \neq 0$$

wird.

a.) $g_0(0) = 0$.

Wir setzen in diesem Falle fest,dass $\varphi(u)$ bzw $\gamma(u)$ die beiden Differentialgleichungen

$$h_1(u) = \varphi f_0 + u\varphi' Q_1 \equiv 1, \quad h_4(u) = \frac{\gamma\varepsilon_{-2} + \gamma' Q_1}{(\gamma)^2} \equiv 0$$

erfüllen sollen und suchen demgemäss $\varphi(u)$ und $\gamma(u)$ zu bestimmen . Es ist

$$(6)\quad \varphi(u) = \frac{1}{u} e^{\int \frac{\varepsilon_{-2}}{Q_1} du} \cdot \int_0^u \frac{e^{-\int \frac{\varepsilon_{-2}}{Q_1} du}}{Q_1} du$$

die einzige für $u = 0$ reguläre Lösung der Differentialgleichung $h_1(u) = 1$, und $\varphi(u)$ kann stets in

folgender Form geschrieben werden:

$$(6a) \qquad \gamma(u) = e^{-\int \frac{g_{-2}}{Q_1} du} ,$$

Die damit definierten Funktionen $\varphi(u)$ und $\gamma(u)$ sind in jedem Invarianzbereich der Gruppe $\mathfrak{g}$ regulär, höchstens mit Ausnahme derjenigen Flächen $u=u_o$, auf denen $Q_1(u)$ verschwindet.

Weitergehende Aussagen über das Verhalten von $\varphi(u)$ und $\gamma(u)$ lassen sich aus dem Hilfssatz 1 in Verbindung mit der Gleichung (3b) folgern. Nach Gleichung (3b) kann nämlich wegen

$$(3b') \qquad \frac{e^{-\int \frac{g_{-2}}{Q_1} du}}{Q_1} \equiv \frac{e^{-\int \frac{f_2}{Q_2} du}}{Q_2}$$

die linke Seite dieser Identität nur dann singulär werden, wenn mit $Q_1(u)$ auch $Q_2(u)$ verschwindet. Hilfssatz 1 besagt aber, dass dieser Fall im Inneren eines beschränkten Invarianzbereiches der Gruppe $\mathfrak{g}$ nicht eintreten kann. Dann sind aber

$$Q_1(u) \quad \varphi(u) \quad \text{und} \quad \frac{\gamma(u)}{Q_1(u)}$$

überall in $\mathfrak{d}$ regulär. Also ist $\gamma(u)$ in $\mathfrak{d}$ regulär, und $\varphi(u)$ kann dort höchstens Polstellen annehmen.

Wir leiten nun wichtige Eigenschaften der Funktionen $h_2(u)$ und $G_o(U)$ aus den Gleichungen (3c) her. Da nämlich $h_1(u) = 1$ sein soll, folgt sofort

$$2\,h_2 + u\,h_2'\,\varphi Q_1 \equiv k \,.$$

$\varphi(u)$, $h_2(u)$ und $Q_2(u)$ sind für $u = 0$ regulär. Wir können sie dort in Reihen entwickeln und erhalten:

$h_2(u) = \sum_0^\infty a_n u^n$, $\varphi Q_1 = 1 + \sum_1^\infty b_n u^n$, da $\varphi\left(f_o + u g_{-2}\right)_{u=0} = 1$,

$k \equiv 2\sum_0^\infty a_n u^n + \left(\sum_0^\infty n a_n u^n\right)\left(1 + \sum_1^\infty b_n u^n\right)$, d.h.

1.) $k = 2\,a_o = 2\,c$.

Die durch diese Gleichung für die Folge definierte Konstante c muss reell sein, da k eine reelle Zahl ist.

2.) $0 = 2\,a_1 + a_1$, also $a_1 = 0$.

3) Ist $a_1 = a_2 = \quad = a_N = 0$ gezeigt, so folgt aus

$0 = 2\,a_{N+1} + (N+1)a_{N+1} + N\,a_N b_1 + \ldots + a_1 b_N$:

$a_{N+1} = 0$

Es ist also $h_2(u) \equiv c$, und unsere Funktion erfüllt damit die beiden Differentialgleichungen

$$\varphi f_o + u\varphi' Q_1 = 1 \quad \text{und} \quad \varphi f_2 + \varphi' Q_2 = c\varphi^2 \,, \text{c reell}$$

Ferner ergibt sich aus (3c) wegen $h_4 \equiv 0$,

$$k \equiv -\frac{dh_3}{du} \cdot \frac{Q_1}{\varphi} \,, \text{ oder, wegen } \frac{dU}{du} = \frac{\varphi}{Q_1}$$

und damit $\dfrac{dh_3}{du}\,\dfrac{Q_1}{\varphi} = \dfrac{dG_o}{dU}$,

$k = 2\,c \equiv -G_o'(U)$, d.h. $G_o(U) \equiv -2c\,W\,Z$.

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf aufmerk-

sam gemacht, dass $g_0(0) = 0$ vorausgesetzt ist. Hilfssatz 2a ebenso wie die ihm folgenden 3a und 4 gelten also im Gegensatz zu Hilfssatz 1 nur unter dieser Voraussetzung als bewiesen.

Hilfssatz 2a: Die durch die Gleichung $h_2(u) = c$ definierte Konstante c ist eine negative Zahl.

Beweis: I. Da $g_0(0) = 0$ vorausgesetzt wurde, bilden die durch T erzeugten Transformationen nach Satz A die Fläche $z = 0$ auf sich ab, denn es ist:

$$T(z) = z^2 g_{-2}(u) + g_0(u) \quad , \text{ d.h. } T(z)\big|_{z=0} = 0 .$$

Ferner wird bei den durch T erzeugten Transformationen die Hyperfläche

$$w\,\varphi(u) - \overline{w\,\varphi(u)} = 0$$

auf sich abgebildet. Um dies zu zeigen, stellen wir folgende Überlegungen an:

1.) Die Entwicklung von $w'\,\varphi(w'.z')$, wobei

$$w'(w,z,t) \quad , \quad z'(w,z,t)$$

die durch T erzeugten Transformationen darstellen mögen, nach dem Parameter t lautet:

$$w'\varphi(w'z') = w\varphi + t\,T(w.\varphi) + \frac{t^2}{2!}\,T^2(w.\varphi) + \ldots .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} T(w\varphi) &= (f_0 + w^2 f_2)(\varphi + u\varphi') + (g_0 + z^2 g_{-2})w^2\varphi' \\ &= h_1(u) + w^2\varphi^2 h_2(u) \\ &= 1 + w^2\varphi^2 c . \end{aligned}$$

Also folgt

$$w'\varphi(w'.z') = w\varphi + t(1 + cw^2\varphi^2) + \ldots \text{ und}$$

$\overline{w'\,\varphi(w'.z')} = \overline{w}\,\overline{\varphi} + t(1+ c\overline{w}^2\overline{\varphi}^2) +$

Wir erhalten demnach als Entwicklung von

$$w'\varphi(w'.z') - \overline{w}'\,\overline{\varphi(w'\,z')} = 0$$

nach dem Parameter t :

$w'\varphi(w'\,z') - \overline{w}'\overline{\varphi(w'.z')} = w\varphi - \overline{w\varphi} + t(w\varphi - \overline{w\varphi})(w\varphi+\overline{w\varphi})c+$

2) Die durch T erzeugten Transformationen kann man auch als Funktionen der reellen Veränderlichen x_1, ,x mit $w = x_1 + i\,x_2$, $z = x_3 + i\,x_4$ schreiben:

(7) $x_1'(x,t), x_2'(x,t), x_3'(x,t), x_4'(x,t)$ (x für $x_1 \ldots, x_4$)

$$U = \sum_{j=1}^{4} \varphi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

sei der reell geschriebene Gruppenoperator dieser Transformationen. Verschwindet nun $U(\Omega)$ für $\Omega = 0$, wenn wenigstens eine der vier partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} \neq 0$ $(j = 1, \ldots, 4)$ auf $\Omega = 0$ ist, so muss nach Satz A die Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$ bei sämtlichen Transformationen (7) wieder in sich übergehen. Nun ist aber $U(\Omega)$ gegeben als Koeffizient von t in der Entwicklung von $\Omega(x')$ nach dem Parameter t :

$\Omega(x') = \Omega(x) + t\,U(\Omega) + \frac{t^2}{2!} U^2(\Omega) + \ldots$

Da die Entwicklung nach dem Parameter eindeutig ist, so ergibt sich

$$U(\Omega) = c(w.\varphi - \overline{w}\,\overline{\varphi})(w\varphi + \overline{w}\,\overline{\varphi}) .$$

$U(\Omega)$ verschwindet also tatsächlich auf

$$\Omega = w\varphi - \overline{w}\,\overline{\varphi} = 0 .$$

3.) Es bleibt noch festzustellen ,dass wenigstens eine

der Ableitungen $\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}$ auf $\Omega = 0$ nicht verschwindet. Falls jedoch

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \varphi + u\varphi' - \overline{\varphi} - \overline{u}\frac{d(\overline{\varphi})}{d\overline{u}} = 0,$$

dann ist sicher

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = i\left(\varphi + u\varphi' + \overline{\varphi} + \overline{u}\frac{d(\overline{\varphi})}{d\overline{u}}\right) \neq 0 \text{ für } (w_0, z_0) = (0,0).$$

Also verschwindet wenigstens eine der Ableitungen $\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}$ $(j=1,\ldots,4)$ auf $\Omega = 0$ nicht identisch, und daraus folgt jetzt, dass alle durch T erzeugten Transformationen die Mannigfaltigkeit

$$w\varphi - \overline{w}\,\overline{\varphi} = 0$$

wieder in sich überführen.

II. Die beiden gegenüber den durch T erzeugten Transformationen invarianten Mannigfaltigkeiten $z = 0$ und $w\varphi - \overline{w}\overline{\varphi} = 0$ schneiden sich in der Geraden, welche durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \varphi(0)\, w = \overline{\varphi(0)}\,\overline{w} \\ z = 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Also wird auch diese Gerade bei sämtlichen durch T erzeugten Transformationen wieder in sich transformiert. Da $\mathfrak{L}$ beschränkt ist, so muss es auf der Schnittgeraden wenigstens einen Randpunkt von $\mathfrak{L}$ geben, weil die Gerade ins Innere von $\mathfrak{L}$ eindringt. (Sie geht durch den Nullpunkt.)

In einer vollen Umgebung von $z = 0$, also auch in einer vollen Umgebung der Schnittgeraden, verhält sich T (und damit die durch T erzeugte Gruppe $(\mathfrak{T})$) regulär. Unter den Randpunkten von $\mathfrak{L}$ auf der Geraden

gibt es wenigstens einen,der einen möglichst geringen Abstand vom Nullpunkt hat Dies sei der Punkt $(w_o,0)$ Er kann weder mit einem anderen Randpunkt auf der Geraden vertauscht werden noch in einen anderen Punkt der Geraden übergehen $(w_o,0)$ ist demnach Fixpunkt der durch T erzeugten Transformationen Also muss in $(w_o,0)$ für jede dort reguläre Funktion $f(w,z)$ $T(f(w,z)) = 0$ werden

$$T(w\varphi) = 1 + c\,w^2\varphi^2$$

nimmt jedoch auf der Hyperfläche

$$\Omega = w\varphi - \overline{w}\,\overline{\varphi} = 0$$

nur dann eine Nullstelle an,wenn $c < 0$ ist,denn auf Ω ist $w\varphi(u)$ stets reell.

Auf Grund des hier bewiesenen Hilfssatzes ist die Hyperfläche $|w\varphi(u)| = K$ mit $K=\sqrt{-\frac{1}{c}}$ definiert für alle u ,für die $\varphi(u)$ regulär ist,d h für mindestens alle Werte von u ,die in $\mathfrak{L}$ angenommen werden,höchstens mit Ausnahme derjenigen Flächen ,auf denen $Q_1(u)$ verschwindet Wir wollen nun zeigen,dass es stets einen beschränkten Invarianzbereich $\mathfrak{L}^*$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt, in dem die Funktion $\varphi(u)$ noch regulär ist,wenn überhaupt ein beschränkter Invarianzbereich der Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert.

Hilfssatz 3a: Gibt es überhaupt einen beschränkten Bereich $\mathfrak{L}$,der die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet ,so gibt es auch stets einen solchen $\mathfrak{L}^*$,in dem $\varphi(u)$ noch regulär ist

Beweis: Mit den Methoden,die wir für den Beweis von

Hilfssatz 2a verwandt haben, zeigen wir zunächst, dass die Hyperfläche $|w\varphi(u)| = K$ durch sämtliche Transformationen der Gruppe $\mathfrak{H}$ wieder auf sich abgebildet wird. Sind nämlich

$$\begin{cases} w' = we^{i\vartheta} \\ z' = ze^{-i\vartheta}, \end{cases} \qquad \begin{cases} w''(w,z,t), \\ z''(w,z,t), \end{cases} \qquad \begin{cases} w''(w,z,t_1) \\ z''(w,z,t_1) \end{cases}$$

die durch R, T, und T_1 erzeugten Transformationen, so wird

1.) $w'\varphi(w'z') = w\varphi(u) + \vartheta i\, w\varphi + \ldots$

$\overline{w'}\,\overline{\varphi(w'z')} = \overline{w}\,\overline{\varphi(u)} - \vartheta i\,\overline{w}\,\overline{\varphi} + \ldots$

$w'\overline{w'}\varphi(w'z')\overline{\varphi(w'z')} = w\overline{w}\varphi\overline{\varphi} - i\vartheta(w\overline{w}\varphi\overline{\varphi} - w\overline{w}\varphi\overline{\varphi}) + \ldots$

Der Koeffizient von ϑ in der Entwicklung nach dem Parameter verschwindet identisch, also insbesondere auf der Hyperfläche $w\overline{w}\varphi\overline{\varphi} = K^2$.

2.) $w''\varphi(w''z'') = w\varphi(u) + t(1+cw^2\varphi^2) + \ldots$

$\overline{w''}\,\overline{\varphi(w''z'')} = \overline{w}\,\overline{\varphi(u)} + t(1+c\overline{w}^2\overline{\varphi}^2) + \ldots$

$w''\overline{w''}\varphi(w''z'')\overline{\varphi(w''z'')} = w\overline{w}\varphi\overline{\varphi} + t(w\varphi + \overline{w}\overline{\varphi})(1+cw\overline{w}\varphi\overline{\varphi}) + \ldots$

Auch hier verschwindet der Koeffizient des linearen Gliedes in der Entwicklung nach dem Parameter auf $|w\varphi|^2 = K^2$.

Es verschwindet ferner auf $\Omega = w\overline{w}\varphi\overline{\varphi} - \frac{1}{c} = 0$ die Ableitung $\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}$ mit $x_1 + i\,x_2 = w$ nicht identisch, denn

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = \overline{w}\varphi\overline{\varphi} + w\varphi\overline{\varphi} + w\overline{w}\left(\overline{\varphi}\,\varphi' z + \varphi\frac{d(\overline{\varphi})}{d\overline{u}}z\right)$$

ist bereits für $z = 0$ auf $w\overline{w}\varphi\overline{\varphi} = K^2$ von Null verschieden. Damit ist gezeigt, dass die Hyperfläche $w\overline{w}\varphi\overline{\varphi} = K^2$ sämtliche durch R und T erzeugten Transformationen gestattet, und da $T_1 = \frac{1}{m}(R,T)$ ist, so gestattet sie nach Satz C auch die durch T_1 erzeugten

Transformationen.

Wir konstruieren nun folgenden (1,-1)-Bereich $\mathfrak{B}^*$: $\mathfrak{B}^*$ besteht aus allen Punkten von $\mathfrak{B}$, die sich innerhalb von $\mathfrak{B}$ mit (0,0) so verbinden lassen, dass dabei die Hyperfläche $|w\varphi| = K$ nicht geschnitten wird. $\mathfrak{B}^*$ hat zwei wichtige Eigenschaften:

1.) Die Funktion $\varphi(u)$ ist in $\mathfrak{B}^*$ regulär. Verbindet man nämlich den Punkt (0,0) mit einem Punkte (w_o, z_o) des Bereiches $\mathfrak{B}$, in dem $\varphi(u)$ eine Polstelle annimmt, so ist $\varphi(u)$ auf dem ganzen (0,0) mit (w_o, z_o) verbindenden Kurvenstück $\mathfrak{L}$, das ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufen möge, noch regulär. (Evtl. hat man unter mehreren Polstellen von $\varphi(u)$ auf $\mathfrak{L}$ die erste von (0,0) aus zu wählen.)

Nun ist im Punkte (0,0) $|w\varphi| = 0$. Da andererseits $|w\varphi|$ auf $\mathfrak{L}$ stetig ist, so muss auf $\mathfrak{L}$ zwischen (0,0) und dem Punkte (w_o, z_o) der Wert $|w\varphi| = K$ angenommen werden, d.h. (w_o, z_o) kann nicht innerer Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}^*$ sein.

2.) $\mathfrak{B}^*$ geht bei sämtlichen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in sich über, denn da $|w\varphi| = K$ in sich übergeht und $\mathfrak{G}$ die Identität enthält, so kann kein Punkt mit $|w\varphi| < K$ in einen Punkt mit $|w\varphi| > K$ geworfen werden bzw. in einen solchen Punkt mit $|w\varphi| < K$, der sich mit (0,0) nur durch ein Kurvenstück verbinden lässt, welches die Hyperfläche $|w\varphi| = K$ schneidet.

Die Hyperfläche $|w\varphi| = K$ kann nun durch die ganze lineare Transformation $w^* = w \cdot \frac{1}{K}$, $z^* = z \cdot K$ stets

in die Hyperfläche $|w\varphi| = 1$ transformiert werden Wir können daher im folgenden $K = 1$ voraussetzen Dabei ist unter Umständen an Stelle von T ein diesem Operator äquivalenter aT (a reell) zu wählen

Hilfssatz 4 Ist $g_0(0) = 0$, so gibt es keinen beschränkten Bereich,der die Gruppe $\mathfrak{g}$ gestattet

Beweis: 1.) Wenn es überhaupt einen beschränkten Bereich $\mathfrak{B}$ gibt,der die Gruppe $\mathfrak{g}$ gestattet,so können wir nach Hilfssatz 3a stets einen solchen Bereich $\mathfrak{B}^*$ konstruieren,in dem $w\varphi(u)$ noch regulär und beschränkt ist und der ebenfalls gegenüber sämtlichen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{g}$ invariant bleibt Also leistet das Funktionspaar $(z\cdot\gamma(u)$ ist ja in j e d e m beschränkten Invarianzbereich der Gruppe $\mathfrak{g}$ regulär)

$$W = w\varphi(u)\ ,\quad Z = z\ \gamma(u)\ , \tag{4a}$$

wobei $\varphi(u)$ und $\gamma(u)$ die Form (6) bzw. (6a) haben,eine analytische Abbildung des Bereiches $\mathfrak{B}^*$ auf einen Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ des (W,Z)-Raumes

Die Funktionaldeterminante der Abbildung (4a) ist

$$\frac{D(w\varphi, z\gamma)}{D(w,z)} = \varphi\cdot\gamma + u(\varphi'\gamma + \varphi\gamma') = \frac{e^{-\int \frac{g_{-2}}{Q_1}\,du}}{Q_1}$$

Wegen Gleichung (3b) und Hilfssatz 1 kann sie in $\mathfrak{B}^*$ nirgends verschwinden Nach einem Satze der Abbildungstheorie [1] ordnet dann die Abbildung (4a) die Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}^*$ auch eineindeutig dem Bereiche $\tilde{\mathfrak{B}}$ oder

---

[1] Siehe Behnke-Thullen ,Kap. I, § 5 .

einem Überlagerungsbereiche von $\tilde{\mathfrak{L}}$ zu. Bei dieser Transformation gehen ferner die Operatoren R, T, T_1 über in die Operatoren

$$\tilde{R} = i\,W\frac{\partial}{\partial W} - i\,Z\frac{\partial}{\partial Z},$$
$$\tilde{T} = (1 - W^2)\frac{\partial}{\partial W} + 2\,W\,Z\frac{\partial}{\partial Z},$$
$$\tilde{T}_1 = -i(1 + W^2)\frac{\partial}{\partial W} + 2\,i\,W\,Z\frac{\partial}{\partial Z}.$$

(Es ist $F_o(U) = h_1(u) = 1$, $F_2(U) = h_2(u) = c = -1$,

$G_{-2}(U) = 0$, $G_o(U) = -2 \cdot c \cdot W \cdot Z = 2 \cdot W \cdot Z$.)

Durch Integration erhalten wir aus diesen Operatoren die Transformationen der Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$, indem wir ansetzen:

$$\frac{dW'}{dt} = 1 - W'^2, \frac{dZ'}{dt} = 2W'Z', \quad \frac{dW'}{dt_1} = -i(1+W'^2), \quad \frac{dZ'}{dt_1} = 2iW'Z'.$$

Also lautet die Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$

$$W' = \frac{W + \alpha}{1 + \bar{\alpha} W} e^{i\vartheta}, \quad Z' = Z \frac{(1+\bar{\alpha} W)^2}{1 - \alpha\bar{\alpha}} e^{-i\vartheta}, \quad (|\alpha| < 1).$$

2.) Es möge (W_1, Z_1) ein beliebiger Randpunkt von $\tilde{\mathfrak{L}}$ sein. Da stets $|W_1| < 1$ sein muss, so gehört er entweder der Hyperfläche $|W| = 1$ an, oder er lässt sich durch eine Transformation der Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ in einen Punkt $(0, Z_o)$ werfen. Es bleiben demnach invariant gegenüber der Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ die Bereiche mit

$$|W| = 1 \text{ und } Z = \frac{Z_o\, e^{-i\vartheta}}{1 - W\bar{W}}, \text{ d.h. } |W|^2 + \left|\frac{Z_o}{Z}\right| = 1$$

als Randflächen. Keiner dieser Bereiche ist durch eine Transformation der Form

$$w = W \cdot F(U), \quad z = Z \cdot G(U)$$

auf einen beschränkten $(1,-1)$-Bereich abbildbar. Also

existiert auch kein einziger Bereich $\mathfrak{B}$, der beschränkt ist und die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, wenn $g_0(0) = 0$ ist.

b) $g_0(0) \neq 0$:

Es bleibt noch zu untersuchen, ob beschränkte $(1,-1)$-Bereiche mit nichtmittelpunktstreuen Automorphismen existieren, wenn im Operator

$$T = (f_0(u) + w^2 f_2(u))\frac{\partial}{\partial w} + (g_0(u) + z^2 g_{-2}(u))\frac{\partial}{\partial z}$$

ausser $f_0(0) \neq 0$ auch $g_0(0) \neq 0$ ist. Für diesen Fall fordern wir von den Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$, dass sie die Gleichungen

$$h_1(u) \equiv 1 \text{ und } h_3(u) \equiv 1$$

erfüllen. Damit ist für $\varphi(u)$ dieselbe Form

$$(6)\quad \varphi(u) = \frac{1}{u}\, e^{\int \frac{g_{-2}}{Q_1} du} \int_0^u \frac{e^{-\int \frac{g_{-2}}{Q_1} du}}{Q_1}\, du$$

gegeben wie bei $g_0(0) = 0$. Wir werden deshalb manche Schlüsse in den folgenden Hilfssätzen kürzer wiedergeben können, da sie denen unter a) parallel laufen. Da ferner die Form der Funktion $\psi(u)$ genau derjenigen von $\varphi(u)$ entspricht,

$$(6b)\quad \psi(u) = \frac{1}{u}\, e^{\int \frac{f_2}{Q_2} du} \int_0^u \frac{e^{-\int \frac{f_2}{Q_2} du}}{Q_2}\, du,$$

gelten sämtliche Aussagen über $\varphi(u)$ mit entsprechenden Abänderungen sofort für $\psi(u)$.

Wir können demnach über $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ sofort aussagen, dass sie in jedem beschränkten Invarianzbereich

der Gruppe $\mathcal{G}$, die durch die Operatoren R, T, T_1 erzeugt wird, noch regulär sind.[1] Höchstens auf den Flächen, auf denen entweder $Q_1(u)$ oder $Q_2(u)$ verschwindet, können sie Polstellen annehmen.

Ferner folgert man wie bei $g_0(0) = 0$ aus $h_1(u) \equiv 1$, dass $h_2(u) \equiv c$ wird. Aus $h_3(u) \equiv 1$ folgt dann $h_4(u) \equiv c'$. (Wegen $c = \frac{k}{2} = c'$ gilt übrigens $c = c'$.) Damit erfüllen die wohldefinierten Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ jetzt die Differentialgleichungen

$$\varphi f_0 + u\varphi' Q_1 \equiv 1, \quad \psi g_0 + u\psi' Q_2 \equiv 1,$$

$$\varphi f_2 + \varphi' Q_2 \equiv c\varphi^2, \quad \psi g_{-2} + \psi' Q_1 \equiv c\psi^2, \quad c \text{ reell}$$

Hilfssatz 2b: Die durch die Differentialgleichung $h_2(u) = c$ definierte Konstante c ist für beschränkte Invarianzbereiche der Gruppe $\mathcal{G}$ nie positiv.[2]

Beweis: Die im Beweis von Hilfssatz 2a durchgeführten Überlegungen für die Hyperfläche

$$\Omega_1 = w \cdot \varphi - \overline{w}\,\overline{\psi} = 0$$

gelten ohne Einschränkung auch dann, wenn $g_0(0) \neq 0$ ist, während dies nicht für $z = 0$ zutrifft. Auch für $g_0(0) \neq 0$ bleibt also die Hyperfläche $\Omega_1 = 0$ invariant gegenüber den durch T erzeugten Transformationen.

Die analytische Fläche

---

[1] Vergl. S. 22f.

[2] Im Gegensatz zu $g_0(0) = 0$, wo $w \cdot \varphi(u)$ nur auf $z=0$ betrachtet wurde und dort überall, auch auf dem Rande noch, regulär war, lässt sich für $g_0(0) \neq 0$ nur $c \leq 0$ beweisen. Evtl. kann nämlich $w \cdot \varphi(u)$ in dem zu betrachtenden Randpunkte der Kurve $\mathcal{L}$ eine singuläre Stelle besitzen.

$$\Omega_2 = w\varphi - z\psi = 0$$ [1]

ist in $\mathfrak{L}$ definiert. Auf Ω_2 verschwinden

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial w} = \varphi + u\varphi' - z^2\psi' \quad \text{und} \quad -\frac{\partial \Omega_2}{\partial z} = \psi + u\psi' - w^2\varphi'$$

nicht identisch, denn sie sind für (0,0) von Null verschieden. Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned} T(\Omega_2) &= (f_0 + w^2 f_2)(\varphi + u\varphi' - z^2\psi') + (g_0 + z^2 g_{-2})(w^2\varphi' - \psi - u\psi') \\ &= h_1(u) + w^2 h_2(u)\varphi^2 - h_3(u) - z^2 h_4(u)\psi^2 \\ &= c(w\varphi - z\psi)(w\varphi + z\psi)\big|_{\Omega_2 = 0} = 0 \end{aligned}$$

Es wird also, falls $g_0(0) \neq 0$ ist, ausser der Hyperfläche

$$\Omega_1 = w\varphi - \overline{w}\,\overline{\varphi} = 0$$

auch die analytische Fläche

$$\Omega_2 = w\varphi - z\psi = 0$$

wieder auf sich abgebildet. Die Schnittkurve $\mathcal{L}$ dieser beiden Mannigfaltigkeiten geht dann ebenfalls in sich über.

Auf dieser Schnittkurve $\mathcal{L}$ nehmen die Funktionen $w\cdot\varphi$ und $z\cdot\psi$ nur reelle Werte an. Darüber hinaus sind beide Funktionen auf $\mathcal{L}$, so weit diese in einem beschränkten Invarianzbereich der Gruppe $\mathfrak{L}$ verläuft, überall analytisch. $\varphi(u)$ kann nämlich nur dort singulär werden, wo $Q_1(u)$ verschwindet. Dann müsste wegen $w\varphi(u) = z\psi(u)$ aber gleichzeitig $\psi(u)$ singulär werden und damit $Q_2(u)$ verschwinden. Diesen Fall schliesst jedoch Hilfssatz 1 aus.

---

[1] Wegen Hilfssatz 1 und Gleichung (3c) haben $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in $\mathfrak{L}$ keine gemeinsame Polstelle.

Es sei (w_o, z_o) ein Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$, der auf der Kurve $\mathfrak{L}$ liegt, und ferner seien $(w_o^{(t)}, z_o^{(t)})$ die Bildpunkte von (w_o, z_o) bei den durch T erzeugten Transformationen . Wir betrachten die Funktion

$$\frac{1}{w_o^{(t)} \varphi(w_o^{(t)} z_o^{(t)})} = \frac{1}{w_o \varphi(u_o)} - \frac{t}{w_o^2 \varphi^2(u_o)}(1+cw_o^2\varphi^2(u_o))$$

Verschwindet der Faktor von t in dieser Entwicklung in keinem Punkte von $\mathfrak{L}$, so folgt aus dieser Entwicklung, dass ein beliebiger Punkt (w_o, z_o) aus $\mathfrak{B}$, der auf der Kurve $\mathfrak{L}$ liegt, stets auch in einen solchen transformiert werden kann, in dem $\frac{1}{w\varphi} = 0$ wird. Also müsste $w \cdot \varphi$ in $\mathfrak{B}$ auch Polstellen auf $\mathfrak{L}$ annehmen. Da das aber den oben genannten Eigenschaften der Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in einem beschränkten Bereich widerspricht, so kann für $c > 0$ der Invarianzbereich der Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht mehr beschränkt sein.

Der Hilfssatz 2b schliesst noch nicht wie der Hilfssatz 2a den Fall $c = 0$ mit aus. Dieser Wert ist deshalb weiter mit zu berücksichtigen.

Hilfssatz 3b: Gibt es überhaupt einen beschränkten Bereich $\mathfrak{B}$, der die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, so gibt es stets auch einen solchen, in dem die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ noch regulär sind.

Beweis: In genau derselben Weise wie im Beweise von Hilfssatz 3a lässt sich zunächst zeigen, dass für $c < 0$ die Hyperflächen

$$(8) \qquad |w\varphi| = K, \quad |z\psi| = K, \text{ mit } K = +\sqrt{-\frac{1}{c}}$$

wieder in sich übergehen. Sämtliche Punkte von $\mathfrak{L}$, die sich mit (0,0) durch eine ganz in $\mathfrak{L}$ verlaufende Kurve so verbinden lassen, dass dabei die Hyperflächen (8) nicht geschnitten werden, bilden dann den Bereich $\mathfrak{L}^*$ mit den verlangten Eigenschaften.

Für c = 0 betrachten wir die Entwicklung von $w' \cdot \varphi(w' \cdot z')$ und $z' \cdot \psi(w' \cdot z')$ nach dem Parameter t:

$$w' \cdot \varphi(w' \cdot z') = w\,\varphi(u) + t \quad ,$$

$$z' \cdot \psi(w' \cdot z') = z\,\psi(u) + t \quad .$$

Alle Punkte (w,z), in denen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ regulär sind, gehen demnach in Punkte (w',z') mit der gleichen Eigenschaft über. Da $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ aber in $\mathfrak{L}$ bis auf Polstellen regulär sind, so müssen alle singulären Flächen $w\,z = u_o$ wieder in sich übergeführt werden. Da das wegen

$$T(w\,z) = z\,Q_1 + w\,Q_2$$

nur dann der Fall ist, wenn

$$Q_1(u_o) = Q_2(u_o) = 0$$

wird, so müssen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in ganz $\mathfrak{L}$ regulär sein, wenn $\mathfrak{L}$ beschränkt ist. Also ist für c=0 $\mathfrak{L}$ selbst der Bereich $\mathfrak{L}^*$ mit den verlangten Eigenschaften.

Wir definieren nun :

Definition : Ein Bereich, der durch die Ungleichungen

$$|w| < 1, |z| < 1, \left|\frac{w - z}{1 + w\,z}\right| < a \quad , \quad (0 < a < 1)$$

definiert wird, heisst ein $\mathfrak{L}_a$-Bereich.

Dann beweisen wir den Satz:

Satz 2: Gestattet ein beschränter (1,-1)-Bereich nichtmittelpunktstreue Automorphismen, so ist er entweder einem Reinhardtschen Kreiskörper oder einem $\overline{\mathcal{G}_4}$-Bereich äquivalent.

Beweis: Ein (1,-1)-Bereich, der nichtmittelpunktstreue Automorphismen gestattet, muss die durch die drei Operatoren

$$R = i\, w\frac{\partial}{\partial w} - i\, z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$T = (f_0(u) + w^2 f_2(u))\frac{\partial}{\partial w} + (g_0(u) + z^2 g_{-2}(u))\frac{\partial}{\partial z},$$

$$T_1 = i(-f_0(u) + w^2 f_2(u))\frac{\partial}{\partial w} + i(g_0(u) - z^2 g_{-2}(u))\frac{\partial}{\partial z}$$

erzeugte Gruppe $\mathcal{G}$ zulassen. Ausser $f_0(0)$ muss nach Hilfssatz 4 auch $g_0(0)$ in T (bzw. T_1) von Null verschieden sein. Für diesen Fall sagt aber Hilfssatz 3b aus, dass es stets einen beschränkten Invarianzbereich $\mathfrak{L}^*$ der Gruppe $\mathcal{G}$ gibt, in dem $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in der Form (6) bzw. (6b) analytisch sind. Also wird der Bereich $\mathfrak{L}^*$ durch das Funktionspaar

(4b) $$W = w\varphi(u) \quad , \quad Z = z\psi(u) \quad ,$$

wo $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ die Form (6) bzw. (6b) haben, analytisch auf einen Bereich $\tilde{\mathfrak{L}}$ des (W,Z)-Raumes abgebildet.

Die Funktionaldeterminante der Abbildung (4b) lautet:

$$\frac{D(w\varphi, z\psi)}{D(w,z)} = \varphi\psi + u(\varphi'\psi + \varphi\psi') = \frac{\psi}{Q_1}(\varphi f_0 + u\varphi' Q_1) + u\varphi\psi\frac{\psi g_{-2} + \psi' Q_1}{(\psi)^2}$$

$$= \frac{\psi}{Q_1}(1 - cu\varphi\psi) = \frac{\varphi}{Q_2}(1 - cu\varphi\psi) \,.$$

Sie kann also höchstens dann verschwinden, wenn

1) $c u \varphi \gamma = 1$ wird. Das ist auch für $c \neq 0$,d.h. nach Hilfssatz 2b für $c < 0$,in $\mathfrak{G}^*$ nicht möglich, da dort stets

$$|w\varphi| < K, \quad |z\gamma| < K \quad , \text{ mit } K^2 = -\frac{1}{c}$$

ist.

2) $\varphi(u_o) = \gamma(u_o) = 0$ wird. Nun gilt einerseits

$$\varphi f_2 + \varphi' Q_2 \equiv c\varphi^2,$$

und durch Reihenentwicklung würde aus $\varphi(u_o) = 0$ folgen $Q_2(u_o) = 0$ Andererseits besteht die Gleichung

$$\gamma g_{-2} + \gamma' Q_1 \equiv c\gamma^2,$$

und damit müsste auch $Q_1(u_o)$ verschwinden ,falls die Funktionaldeterminante in $\mathfrak{G}^*$ eine Nullstelle annehmen würde Da aber $Q_1(u)$ und $Q_2(u)$ in $\mathfrak{G}^*$ keine gemeinsamen Nullstellen haben ,so ist die Funktionaldeterminante von (4b) überall in $\mathfrak{G}^*$ von Null verschieden. Also werden die Punkte des Bereiches $\mathfrak{G}^*$ den Punkten des Bereiches $\tilde{\mathfrak{G}}$ (bzw. eines Überlagerungsbereiches von $\tilde{\mathfrak{G}}$,der im Innern nicht verzweigt ist) eineindeutig und analytisch zugeordnet.

1 Fall Ist $c = 0$,so geht T in die Form

$$\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial W} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

über Die von diesem Operator erzeugten Transformationen sind

$$W' = W + t \ , \ Z' = Z + t \ .$$

Gegenüber diesen Transformationen bleibt jedoch kein beschränkter Bereich fest.

2 Fall Da $c > 0$ in einem beschränkten Bereiche, der die Gruppe $\mathfrak{H}$ gestattet,nicht möglich ist,bleibt

noch $c < 0$ zu untersuchen. Wir können dann auf den Wert $c = -1$ normieren[1] und erhalten als Operatoren, welche die Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ erzeugen,

$$\tilde{R} = i.W \frac{\partial}{\partial W} - i Z \frac{\partial}{\partial Z},$$

$$\tilde{T} = (1-W^2) \frac{\partial}{\partial W} + (1- Z^2)\frac{\partial}{\partial Z},$$

$$\tilde{T}_1 = -i(1+W^2)\frac{\partial}{\partial W} + i(1 +Z^2)\frac{\partial}{\partial Z}.$$

Dann lauten die Automorphismen des Bereiches $\tilde{\mathfrak{b}}$:

$$W' = \frac{W + \alpha}{1 + \bar{\alpha} W} e^{i\varphi}, \quad Z' = \frac{Z + \bar{\alpha}}{1 + \alpha Z} e^{-i\varphi}, (|\alpha| < 1).$$

(Diese Transformationen werden genau so durch Integration gewonnen wie bei den Bereichen mit $m\,p > 1$ bzw. wie in Hilfssatz 4 .)

Es möge nun (W_o, Z_o) ein Randpunkt von $\tilde{\mathfrak{b}}$ sein. Wäre $|W_o| > 1$ oder $|Z_o| > 1$,so gäbe es stets eine Transformation der Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$,welche diesen Punkt in einen Punkt der unendlich fernen Ebene werfen würde Also ist stets $|W_o| < 1$, $|Z_o| < 1$. Dann lässt sich immer eine solche Transformation der Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ angeben,dass (W_o, Z_o) in einen Punkt $(a,0)$ übergeht. Die Bilder dieses Punktes bei Ausführung aller Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind dann die Randpunkte des Bereiches $\tilde{\mathfrak{B}}$:

$$Z = \bar{\alpha} e^{-i\varphi}, \quad W = \frac{a + \bar{Z} e^{-i\varphi}}{1 + aZe^{i\varphi}} e^{i\varphi},$$

also die Mannigfaltigkeit

$W - \bar{Z} = a\, e^{i\varphi}(1 - W Z)$ mit $0 < a < 1$, $|W| < 1, |Z| < 1$.

---

[1] Vergl. S. 30,letzter Absatz .

Das sind genau die Randpunkte der $\overline{\mathcal{F}_q}$-Bereiche.

Es ist noch zu zeigen, dass es keine weiteren beschränkten Invarianzbereiche der Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ gibt als diejenigen, welche durch eine Transformation der Form $w = W\,F(U)$, $z = Z\,G(U)$ aus den $\overline{\mathcal{F}_q}$-Bereichen hervorgehen. Nun ist für alle $\overline{\mathcal{F}_q}$-Bereiche $|WZ| < 1$. Soll also mit den $\overline{\mathcal{F}_q}$-Bereichen zugleich ein unbeschränkter Invarianzbereich der Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ in einen beschränkten der Gruppe $\mathcal{G}$ übergehen, so muss die Abbildung $(W \cdot F(U), Z \cdot G(U))$ für alle diejenigen Werte von $W \cdot Z = U$ regulär sein, die in einem solchen Bereiche angenommen werden. Es sei etwa $|W_0| > 1$, und $(W_0, 0)$ ein Randpunkt eines solchen Bereiches. Aus

$$W' \cdot Z' = \frac{W_0 + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\, W_0}$$

folgt dann, dass $W \cdot Z$ in diesem Bereiche jeden beliebigen komplexen Wert annehmen würde. Die Funktionen $F(U)$ und $G(U)$ müssten also in der ganzen U-Ebene regulär, d.h. konstant sein. Durch ganze lineare Funktionen gehen jedoch nur beschränkte Bereiche in beschränkte über. Es kann also kein Bildbereich eines unbeschränkten, gegenüber der Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ invarianten Bereiches beschränkter Invarianzbereich der Gruppe $\mathcal{G}$ sein.

Satz 3: Die einzigen eineindeutigen und analytischen Abbildungen der $\overline{\mathcal{F}_q}$-Bereiche auf sich bestehen aus der Gruppe

$$(\tilde{\mathcal{G}}) \qquad w' = \frac{w + \alpha}{1 + \bar{\alpha} w} e^{i\varphi}, \quad z' = \frac{z + \bar{\alpha}}{1 + \alpha z} e^{-i\varphi}, (|\alpha| < 1)$$

und den Vertauschungen von w und z

$$(\mathcal{U}) \qquad w'' = z, \quad z'' = w.$$

Beweis Es wurde bereits gezeigt, dass die $\overline{\mathcal{F}_q}$-Bereiche die Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ zulassen Wir haben also nur noch zu zeigen, dass Sie ausser der Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ und $(\mathcal{U})$ keine weiteren Automorphismen gestatten

Mittelpunktstreue Automorphismen eines (1,-1)-Bereiches können nur in der Form $\tilde{w} = w \cdot f(u)$, $\tilde{z} = z \cdot g(u)$ auftreten, von $(\mathcal{U})$ abgesehen. Sie sind also, höchstens mit Ausnahme der eindimensionalen Mannigfaltigkeit von Randpunkten mit $w \cdot z = 1$ und $w = \bar{z}$, überall auf dem Rande der $\overline{\mathcal{F}_a}$-Bereiche noch regulär. Die Randgleichung der $\overline{\mathcal{F}_a}$-Bereiche,

$$(9) \qquad (w - \bar{z}) e^{i\varphi} = a(1 - w \cdot z),$$

müsste also auch in der Form

$$(10) \qquad (wf(u) - \overline{zg(u)}) e^{i\varphi} = a(1 - wzf(u)g(u))$$

geschrieben werden können. Da f(u) nicht verschwinden kann, denn sonst würde die Abbildung nicht eineindeutig sein, so können wir durch f(u) dividieren. Die Gleichung

$$(10a) \qquad (w - \bar{z} \frac{\bar{g}}{\bar{f}}) e^{i\varphi} = a(\frac{1}{f} - wzg)$$

müsste also mit der Gleichung (9) identisch sein. Die Gleichung (9) besitzt jedoch zu vorgegebenem a und beliebigem φ nur eine Lösung für z, falls $a \cdot w \neq 1$ ist Jede weitere Lösung der Gleichung (9) müsste nämlich auch der Gleichung

$$(\overline{z'} - \overline{z}) e^{i\varphi} = a w (z' - z)$$

genügen. Also folgt: $f(u) = \overline{g(u)}$, d.h. $f(u) = e^{i\varphi}$, $g(u) = e^{-i\varphi}$, da die Funktionen $f(u)$ und $g(u)$ beide analytisch sein müssen. Ein $\overline{\mathfrak{F}_a}$-Bereich gestattet demnach als mittelpunktstreue Automorphismen ausser $(\mathfrak{p})$ nur diejenigen der Gruppe $(\tilde{\mathfrak{q}})$.

Nichtmittelpunktstreue Automorphismen eines $\overline{\mathfrak{F}_a}$-Bereiches, die nicht in der Gruppe $\tilde{\mathfrak{q}}$ vorkommen, würden das Auftreten eines weiteren Operators

$$\tilde{S} = (\tilde{f}_0(u) + w^2 \tilde{f}_2(u)) \frac{\partial}{\partial u} + (\tilde{g}_0(u) + z^2 \tilde{g}_{-2}(u)) \frac{\partial}{\partial z}$$

erfordern. Es sei $\tilde{g}_0(0) = b$ reell, was stets zu erreichen ist. Bilden wir dann den Operator $\tilde{S} - b\tilde{T}$, so sind zwei Fälle möglich:

1.) $\tilde{f}_0(0) - b \neq 0$. In diesem Falle würde der Operator $\tilde{S} - b\tilde{T}$ Transformationen erzeugen, die nach Hilfssatz 4 keinen beschränkten Bereich invariant lassen.

2.) $\tilde{f}_0(0) - b = 0$. Dann erzeugt auch der Operator $\tilde{S} - b\tilde{T}$ mittelpunktstreue Automorphismen, und das ist wegen $\tilde{S} - b\tilde{T} = r R$ nur möglich, wenn $\tilde{S} = b\tilde{T}$ ist.

Die $\overline{\mathfrak{F}_a}$-Bereiche haben noch einige Merkmale mit den $\mathfrak{F}_a$-Bereichen gemeinsam. So lässt sich beweisen, dass zwei Bereiche $\overline{\mathfrak{F}_a}$ und $\overline{\mathfrak{F}_{a'}}$ mit $a \neq a'$ nicht aufeinander abbildbar sind (die Operatoren $\tilde{T}$ und $\tilde{T}_1$ lassen sich nur durch die Identität wieder in sich überführen), und dass auch jeder $\overline{\mathfrak{F}_a}$-Bereich ein Regularitätsbereich ist.

§ 4. Die Bereiche mit m.p < -1.

Als letzte Klasse der (m,p)-Bereiche bleiben noch diejenigen zu untersuchen, bei denen das Produkt m.p < -1 wird . Die Untersuchung dieser Bereiche weist nach zwei Richtungen Berührungspunkte auf.Einmal haben die Bereiche sehr starke Ähnlichkeit mit den Bereichen m.p > 1 . Auf der anderen Seite besteht Gemeinsames zwischen ihnen und den (1,-1)-Bereichen. Auch bei den Bereichen mit m.p< -1 treten nämlich in den Gruppenoperatoren Funktionen auf ,die nur bis zu einem gewissen Grade bestimmt sind. Da nun die Untersuchung der Bereiche mit m.p > 1 bzw. mit m.p = -1 voraufging ,kann diejenige der Bereiche mit m.p <-1 in manchen Punkten kürzer dargestellt werden.

Auch für die Bereiche mit m.p < -1 hatten wir bereits die allgemeinste Form eines Operators S angegeben, der nichtmittelpunktstreue Automorphismen eines (m,p)-Bereiches erzeugt. Sie lautete

$$S = \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} w^{\kappa} z^{\lambda} f_n(u)\right\} \frac{\partial}{\partial w} + \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} w\, z\, g_n(u)\right\} \frac{\partial}{\partial z} \quad ,$$

mit $u = w^{p'} z^{m}$, $(m > 0,\ p = -p')$. Auch hier bedeutet es keine wesentliche Einschränkung,wenn wir $f_o(0) \neq 0$ voraussetzen ,da höchstens eine der beiden Funktionen $f_o(u)$ und $g_o(u)$ im Nullpunkte verschwinden darf. Zur näheren Bestimmung derjenigen Funktionen f_n, g_n welche verschwinden,bilden wir wiederum Klammerausdrücke zwischen S und dem Operator der mittelpunktstreuen Automorphismen ,

$$R = i\,m\,w\frac{\partial}{\partial w} - i\,p'\,z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Wir erhalten so die Operatoren

$$S_1=(R,S)=i\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}(n-m)w^{\kappa}z^{\lambda}f_n\right\}\frac{\partial}{\partial w}+i\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}(n+p')w^{\kappa}z^{\lambda}g_n\right\}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$S_2=(R,S_1)=-\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}(n-m)^2w^{\kappa}z^{\lambda}f_n\right\}\frac{\partial}{\partial w}-\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}(n+p')^2w^{\kappa}z^{\lambda}g_n\right\}\frac{\partial}{\partial z},$$

denn es ist

$$\frac{\partial f_n(u)}{\partial w}=\frac{df_n}{du}\cdot\frac{\partial(w^{p'}z^m)}{\partial w}=p'w^{p'-1}z^m\frac{df_n}{du},\quad\frac{\partial f_n}{\partial z}=mw^{p'}z^{m-1}\frac{df_n}{du}$$

$$m\,w\,w^{\kappa}z^{\lambda}\frac{\partial f_n}{\partial w} - p'\,z\,w^{\kappa}z^{\lambda}\frac{\partial f_n}{\partial z} = 0\ ,\ \text{und}$$

$$i\,m\,w\,\kappa\,w^{\kappa-1}z^{\lambda}f_n - ip'z\lambda w^{\kappa}z^{\lambda-1}f_n = i\,n\,w^{\kappa}z^{\lambda}f_n\ .$$

Aus S und S_2 bilden wir $S^* = p'^2\,S + S_2$:

$$S^* = -\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}((n-m)^2w^{\kappa}z^{\lambda}f_n)\right\}\frac{\partial}{\partial w} -\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}n(n+2p')w^{\kappa}z^{\lambda}g_n\right\}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Es gibt also in der Gruppe ,der S angehört ,stets einen solchen Operator S^* ,in dem $g_o^*(u) = 0$ ist. Wir können demnach $g_o(u) = 0$ voraussetzen. In diesem Falle erzeugt der Operator

$$m^2S+S_2=-\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}n(n-2m)w^{\kappa}z^{\lambda}f_n\right\}\frac{\partial}{\partial w}-\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}((n+p')^2-m^2)w^{\kappa}z^{\lambda}g_n\right\}\frac{\partial}{\partial z}$$

Transformationen,welche den Nullpunkt festlassen .
Die einzige Gruppe mittelpunktstreuer Automorphismen von (m,p)-Bereichen ,welche sich nicht auf Reinhardtsche Kreiskörper abbilden lassen, wird jedoch durch R erzeugt, und daher folgt

$$m^2S + S_2 = r.R\ ,\ (r\ \text{eine reelle Konstante}).$$

Es können also in S ausser $f_m(u) \equiv \frac{r}{m}i$,$g_p(u) \equiv \frac{-r}{m^2}p'i$

höchstens diejenigen Funktionen von Null verschieden sein, die in $m^2S + S_2$ den Faktor Null erhalten haben, und das sind

$$f_o(u), f_{2m}(u), g_{p+m}(u), g_{p-m}(u)$$

Also erzeugen auch die Operatoren

$$T = (f_o + w^2 f_{2m})\frac{\partial}{\partial u} + (w z g_{p+m} + w^{p'-1} z^{m+1} g_{p-m})\frac{\partial}{\partial z},$$

$$T_1 = i(-f_o + w^2 f_{2m})\frac{\partial}{\partial u} + i(w z g_{p+m} - w^{p'-1} z^{m+1} g_{p-m})\frac{\partial}{\partial z}$$

Transformationen der gesuchten Untergruppe $\mathfrak{G}$. Nun ergibt sich ferner

$$T_2 = \frac{1}{m}(R, T_1) = -(f_o + w^2 f_{2m})\frac{\partial}{\partial u} - (w z g_{p+m} + w^{p'-1} z^{m+1} g_{p-m})\frac{\partial}{\partial z}$$

und

$$\frac{1}{2}(T, T_1) = iw\left\{2f_o f_{2m} - uf'_o(p'f_{2m} + mg_{p+m}) + uf'_{2m}(p'f_o + umg_{p-m})\right\}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$-iz\left\{u(g_{p-m} + ug'_{p-m})(mg_{p+m} + p'f_{2m})\right.$$

$$\left. + ug'_{p+m}(p'f_o + umg_{p-m}) - f_o g_{p+m} - uf_{2m} g_{p-m}\right\}\frac{\partial}{\partial z}$$

T_2 ist bis auf den Faktor -1 mit T identisch, und $\frac{1}{2}(T, T_1)$ muss als Operator mittelpunktstreuer Transformationen wieder bis auf einen reellen Faktor k mit R übereinstimmen. Das heisst also:

1) R, T, T_1 erzeugen eine Liesche Gruppe von Transformationen, die die gesuchte Untergruppe $\mathfrak{G}$ ist.

2,) Es bestehen die Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} k\, m \equiv 2f_o f_{2m} - u\, f'_o\, Q_2 + uf'_{2m} Q_1 \text{ , und} \\ k\, p' \equiv u(g_{p-m} - ug'_{p-m})Q_2 - ug'_{p+m} Q_1 - f_o g_{p+m} - f_{2m} g_{p-m} \end{cases}$$

falls man

$Q_1(u) = p'f_o + mug_{p-m}$ und $Q_2(u) = p'f_{2m} + mg_{p+m}$

setzt. In anderer Form geschrieben lauten die Gleichungen (11) auch

$$(11a)\quad Q_1\left(u\frac{dQ_2}{du} + f_{2m}\right) \equiv Q_2\left(u\frac{dQ_1}{du} - f_o\right) .$$

Kann man zwei (m,p)-Bereiche mit $m \cdot p < -1$ aufeinander abbilden, so geschieht das stets durch ein Funktionspaar von der Form

$$W = w\varphi(u) , \quad Z = z\gamma(u) , \quad (u = w^{p'}z^{m}, m>0, p=-p')$$

Wir werden darum auch hier festzustellen versuchen, wann eine Abbildung des (m,p)-Bereiches, der die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, auf einen anderen so möglich ist, dass in den Operatoren des Bildbereiches Funktionen erscheinen, welche eine Bestimmung der Transformationen dieses Bereiches ermöglichen. Der Operator $\tilde{T}$ in den neuen Veränderlichen W und Z errechnet sich dann aus den Funktionen $f_o, f_{2m}, g_{p+m}, g_{p-m}$ wie folgt:

$$F_o(U) = \varphi f_o + u\varphi' Q_1 , \quad F_{2m}(U) = \frac{\varphi f_{2m} + u\varphi' Q_2}{(\varphi)^2} ,$$

$$G_{p+m}(U) = \frac{\gamma g_{p+m} + u\gamma' Q_2}{\varphi\cdot\gamma} , \quad G_{p-m}(U) = \frac{\gamma g_{p-m} + \gamma' Q_2}{(\varphi)^{p'-1}(\gamma)^{m+1}} .$$

Wir setzen

$F_o(U) = h_1(u)$, $F_{2m}(U) = h_2(u)$, $G_{p+m}(U) = h_3(u)$, $G_{p-m} = h_4(u)$.

Dann ergibt sich:

$$2h_1h_2 - \frac{u}{\varphi}h_1'Q_2 + uh_2'\varphi Q_1 \equiv 2f_of_{2m} - f_o'uQ_2 + uf_{2m}'Q_1 \equiv k\,m,$$

$$u\varphi^{p'-1}\gamma^{m}h_4Q_2\left(1 + up'\frac{\varphi'}{\varphi} + um\frac{\gamma'}{\gamma}\right) + u^2\varphi^{p'-1}\gamma^{m}h_4'Q_2 - uh_3'\varphi Q_1 - h_1h_3$$

$$- u\varphi^{p'}\gamma^{m}h_2h_4 \equiv u(g_{p-m} + ug_{p-m}')Q_2 - ug_{p+m}'Q_1 - f_og_{p+m} - f_{2m}g_{p+m} \equiv kp!$$

Im folgenden sollen nun $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in der Form

$$(12)\quad \varphi(u) = e^{-\int_{u_0}^{u} \frac{f_0}{uQ_1}du} \int_0^u \frac{e^{\int_{u_0}^{u} \frac{f_0}{uQ_1}du}}{u\cdot Q_1}du, \quad \psi(u) = e^{-\int_{u_0}^{u} \frac{g_{p-m}}{Q_1}du}$$

vorausgesetzt werden. Die Funktion $\varphi(u)$ ist die einzige im Nullpunkt reguläre Lösung der Differentialgleichung $h_1(u) = \varphi f_0 + u\varphi' Q_1 \equiv 1$, während $\psi(u)$ die Differentialgleichung $h_4(u)\varphi^{p-1}\psi^{m+1} = \psi g_{p-m} + \psi' Q_1 \equiv 0$ befriedigt. Dass $\varphi(u)$ für $u = 0$ regulär ist, zeigen wir durch Reihenentwicklung:

$$e^{\int_{u_0}^{u} \frac{f_0}{uQ_1}du} = e^{\frac{1}{p'}\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} + R_1(u)} = \alpha u^{\frac{1}{p'}} e^{R_1(u)},$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{\alpha} u^{-\frac{1}{p'}} e^{-R_1(u)} \int_0^u \frac{\alpha \cdot R_1(u)}{u^{1-\frac{1}{p'}}\cdot Q_1}du = e^{-R_1} u^{-\frac{1}{p'}} u^{\frac{1}{p'}} R_2.$$

$R_1(u), R_2(u)$ sind Funktionen, die sich für $u = 0$ regulär verhalten. Auch $\psi(u)$ ist für $u = 0$ regulär, da dort $Q_1(u)$ nicht verschwindet. Nun können wir $h_2(u)$ und $h_3(u)$ um $u = 0$ in Reihen entwickeln. Wir erhalten dann:

a) $h_2(u) = \sum_0^\infty \alpha_u u^n$, $\varphi Q_1 = p' + \sum_1^\infty \beta_u u^n$:

$$km \equiv 2\sum_0^\infty \alpha_u u^n + \left(\sum_0^\infty n\alpha_u u^n\right)\left(p' + \sum_1^\infty \beta_u u^n\right) \quad \text{d.h.}$$

$\alpha_0 = c = k\frac{m}{2}$, $\alpha_u = 0$ für $n \geq 1$, (c mit k reell)

b.) $\varphi Q_1 = p' + \sum_1^\infty \beta_u u^n$, $h_3(u) = \sum_0^\infty \gamma_u u^n$:

$$kp' \equiv -\sum_0^\infty \gamma_u u^n - \left(\sum_0^\infty n\gamma_u u^n\right)\left(p' + \sum_1^\infty \beta_u u^n\right), \quad \text{d.h.}$$

$$\gamma_0 = -kp' = -2c\frac{p'}{m}, \qquad \gamma_u = 0 \text{ für } n \geq 1.$$

Die von uns definierten Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ erfüllen also auch die Differentialgleichungen

$$h_2(u) = \frac{\varphi f_{2m} + u\varphi' Q_2}{(\varphi)^2} \equiv c \text{ und } h_3(u) = \frac{\psi g_{p+m} + u\psi' Q_2}{\varphi \cdot \psi} \equiv -2c\frac{r'}{w}.$$

Die reelle Konstante c soll in den folgenden Hilfssätzen wieder durch die Gleichung $h_2(u) = c$ definiert sein.

Entsprechend wie für $m\,p = -1$ lassen sich auch für die Bereiche mit $m\,p < -1$ drei Hilfssätze aussprechen:

Hilfssatz 5: Die Ausdrücke $Q_1(u) = p' f_o + mug_{p-m}$ und $Q_2(u) = p' f_{2m} + m\,u\,g_{p+m}$ nehmen in einem beschränkten Bereich $\mathfrak{B}$, der die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, keine gemeinsamen Nullstellen an.

Hilfssatz 6: Für beschränkte Invarianzbereiche der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die Konstante c stets negativ.

Hilfssatz 7: Die Hyperfläche $|w\varphi(u)| = k$ mit $k = \sqrt{-\frac{1}{c}}$ bleibt invariant gegenüber sämtlichen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$

Die Beweise für diese Hilfssätze lassen sich wörtlich aus dem § 3 übertragen, so dass wir uns hier auf die Wiedergabe der Sätze beschränken können Mit ihrer Hilfe wird es uns gelingen, sämtliche Bereiche mit $m\,p < -1$, welche nichtmittelpunktstreue Automorphismen gestatten, zu übersehen Es gilt nämlich:

Satz 4 Gestattet ein beschränkter (m,p)-Bereich mit $m\,p < -1$ nichtmittelpunktstreue Automorphismen, so ist

er einem Reinhardtschen Kreiskörper äquivalent.

Beweis: Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen dass es keinen beschränkten (m,p)-Bereich ($m\,p<-1$) geben kann, welcher die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet.

a) In jedem beschränkten Bereich $\mathfrak{L}$, der die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, und in dem $\varphi(u)$ regulär ist, muss auch $\chi(u)$ noch regulär sein

Es besteht nämlich die Gleichung

$$h_3(u)\,\varphi = g_{p+m} + u\,\frac{\chi'}{\chi}\,Q_2 \equiv -2\,c\,\frac{p}{m}\,\varphi\,.$$

Für $\frac{\chi'}{\chi}$ erhalten wir

$$\frac{\chi'}{\chi} = -\frac{g_{p-m}}{Q_1}$$

Da in jedem beschränkten Bereiche $\mathfrak{L}$, welcher die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, $Q_2(u_o) \neq 0$ ist falls $Q_1(u_o)$ verschwindet so nimmt $\frac{\chi'}{\chi}$ einen Pol erster Ordnung an, falls $Q_1(u)$ verschwindet $\varphi(u)$ muss also ebenfalls einen Pol erster Ordnung annehmen, wenn $Q_1(u)$ in $\mathfrak{L}$ eine Nullstelle annimmt

b.) Gibt es überhaupt einen beschränkten Bereich $\mathfrak{L}$, der die Gruppe $\mathfrak{G}$ gestattet, so gibt es auch einen Bereich $\mathfrak{L}^*$, in dem $\varphi(u)$ noch regulär ist, und der ebenfalls durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ in sich transformiert wird

$\mathfrak{L}^*$ besteht aus sämtlichen Punkten von $\mathfrak{L}$, die durch eine ganz in $\mathfrak{L}$ verlaufende Kurve, welche die Hyperfläche $|w\varphi(u)| = K$ nicht schneidet, mit dem Nullpunkt verbunden werden können. $\mathfrak{L}^*$ hat offenbar die verlangten Eigenschaften.

c.) Den so konstruierten Bereich $\mathfrak{L}^*$ bilden wir analy.

tisch und eineindeutig auf einen Bereich $\tilde{\mathfrak{L}}$ des (W,Z)-Raumes ab durch das Funktionspaar $W = w\varphi(u)$, $Z = z\,\gamma(u)$,wobei $\varphi(u)$, $\gamma(u)$ die Form (12) haben. In $\mathfrak{L}^*$ sind nämlich $w\,\varphi(u)$ und $z\,\gamma(u)$ regulär Da in $\mathfrak{L}^*$ $Q_1(u)$ keine Nullstelle annehmen kann, denn sonst wäre dort nach a.) die Funktion $\varphi(u)$ singulär ,so verschwindet auch die Funktionaldeterminante der Abbildung (W,Z) in $\mathfrak{L}^*$ nirgends :

$$\frac{D(w\varphi, z\gamma)}{D(w,z)} = \varphi\gamma + u\,p'\varphi'\gamma + um\varphi\gamma' = \frac{e^{-\int_{u_0}^{u}\frac{g_{p-m}}{Q_1}du}}{Q_1}$$

Die Gruppe $\tilde{\mathfrak{g}}$, die den Bereich $\tilde{\mathfrak{L}}$ invariant lässt, wird dann erzeugt durch die Operatoren

$$\tilde{R} = i\,m\,W\frac{\partial}{\partial W} - i\,p'\,Z\,\frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\tilde{T} = (1-W^2)\frac{\partial}{\partial W} + 2\,\frac{p'}{m}\,W\,Z\,\frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\tilde{T}_1 = -\,i(1+W^2)\frac{\partial}{\partial W} + 2\,i\,\frac{p'}{m}\,W\,Z\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

(Es wurde dabei $c = -\frac{1}{k^2} = -1$ gesetzt. Diesen Fall kann man aber stets durch die ganze lineare Transformation $W^* = \frac{1}{k}W$, $Z^* = kZ$ erreichen,wenn man von dem $\tilde{T}$ äquivalenten Operator $k\tilde{T}$ ausgeht.)

Also lauten die Transformationen der Gruppe $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$W' = \frac{W+\alpha}{1+\bar{\alpha}W}\,e^{im\vartheta}, \quad Z' = Z\left[\frac{(1+\bar{\alpha}W)^2}{1-\alpha\bar{\alpha}}\right]^{\frac{p}{m}} e^{ip\vartheta}, \quad (|\alpha|<1)$$

Ist (W_1,Z_1) ein Randpunkt des Bereiches $\tilde{\mathfrak{L}}$,so kann man stets eine Transformation der Gruppe $\tilde{\mathfrak{g}}$ finden, die diesen Punkt in den Punkt $(0,Z_0)$ wirft . Die Bildpunkte dieses Punktes

$$W = \alpha e^{im\vartheta}, \quad Z = Z_0(1 - W\overline{W})^{\frac{p'}{m}} e^{ip\vartheta}$$

zusammen mit der Hyperfläche $|W| = 1$ bilden den Rand von $\tilde{\mathfrak{k}}$. Also bleiben invariant gegenüber der Gruppe $\tilde{\mathfrak{y}}$ die Bereiche mit

$$|W| < 1, \quad |W|^2 + \left|\frac{Z_0}{Z}\right|^{\frac{m}{p'}} > 1 .$$

$\tilde{\mathfrak{k}}$ ist also unbeschränkt und lässt sich auch nicht auf einen beschränkten Bereich abbilden, denn jede Funktion, die das bewirken soll, muss für alle Z regulär und beschränkt d h konstant sein. Es gibt daher auch keinen beschränkten Bereich $\mathfrak{k}$, der die Gruppe $\mathfrak{y}$ gestattet

Damit ist die Untersuchung der beschränkten (m.p)-Bereiche abgeschlossen. Fassen wir noch einmal alle Ergebnisse einschliesslich derjenigen von H Cartan zusammen :

Jeder beschränkte eigentliche (m,p)-Bereich der nichtmittelpunktstreue Automorphismen gestattet lässt sich für $m\,p \neq \pm 1$ auf einen Reinhardtschen Kreiskörper abbilden. Für $m\,p = 1$ bzw. $m\,p = -1$ ist evtl. auch eine Abbildung auf einen $\mathfrak{H}_2$- bzw. $\overline{\mathfrak{H}_2}$-Bereich möglich

Literaturverzeichnis.

1.) H. Behnke/P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Berlin 1934. (Erg. Math. u. i. Gr ,Bd. 3,Heft 3.)

2.) H. Cartan (Cartan I): Les fonctions de deux variables complexes et la problème de la représentation analytique ,Journ. Math. IX Bd. 35,(1931).

3.) H. Cartan (Cartan II): Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semicerclés bornés. Math. Ann. Bd. 106, (1932) .

4.) K. Reinhardt : Über Abbildungen der analytischen Funktionen zweier Veränderlichen. Math. Ann.Bd.83.

5.) P. Thullen: Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern. (Diss. Behnke, Münster) , Math. Ann. Bd 104 , (1931) .

6.) Vivanti/Boulanger: Sur la théorie des groupes de transformations , Paris 1904 .

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Inhaltsverzeichnis

Einleitung Seite 1

§ 1 Hilfsmittel für die Untersuchung der Abbildungen von (m,p)-Bereichen 3

§ 2. Die kreissymmetrischen Bereiche mit $m\,p > 1$ 8

§ 3 Kreissymmetrische Bereiche mit $m \cdot p = -1$. 15

§ 4. Die Bereiche mit $m \cdot p < -1$ 44

Lebenslauf.

Am 27. Dezember 1908 wurde ich, Heinrich Wilhelm Bohne, evangelischer Konfession, als Sohn des Kaufmanns und Gastwirts Heinrich Bohne und seiner Ehefrau Minna geb. Schlottmann zu Rahden (Westf.) geboren. Ostern 1915 trat ich in die Volksschule zu Rahden ein und besuchte von 1923 ab die Aufbauschule zu Petershagen (Weser). Ostern 1929 legte ich an der Aufbauschule zu Petershagen (Weser) meine Reifeprüfung ab. Vom Sommer 1929 bis zum Winter 1932/33 und anschließend ein Semester als Gasthörer studierte ich in Münster (Westf.) Mathematik, Erdkunde und Physik. Seit dem Sommer 1932 gehörte ich dem Oberseminar von Herrn Prof. Dr. Behnke an. Ihm verdanke ich auch Anregung und wesentliche Förderung der vorliegenden Arbeit. Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren Behnke, Burchardt, Kratzer, Mecking, Niemeyer, G. Schmidt, Scholz.